ANUL XXIV. MARTIE 1944 No. 1.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **IOAN V. MATIES:** CONTRIBUȚII LA REZOLVAREA CONGRUENȚELOR DE GRADUL n ȘI ORDINUL p.
2. NOTE MATEMATICE 1, 2, 3.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1981, 1994, 2031, 2034, 2038.
5. PROBLEME PROPUSE: 2209–2216.
6. INFORMAȚIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

38677

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), va fi de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — NO. 1 TIMISOARA, MARTIE 1944.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

CONTRIBUȚII LA REZOLVAREA CONGRUENȚELOR DE GRADUL n ȘI ORDINUL p.

DE

Prof. IOAN V. MĂTIEȘ.

Dacă expresiunile unei ecuații, rezolvabilă în numere întregi, conține simbolul *Mult d* [sau $E \equiv a \pmod d$], ecuația se numește *ecuație-congruență (ecuație cu congruențe)*, sau simplu *congruență*, ca de exemplu:

Ecuația

$$x^3 + 2x + 1 = M.\,10^p$$

sau

$$x^3 + 2x + 1 \equiv 0, \pmod{10^p}$$

este o congruență de gradul trei, de ordinul p, cu o necunoscută și având baza 10.

Congruențele pot să fie cu una, două sau mai multe necunoscute:

Congruențele de gradul n cu o necunoscută sunt de forma

$$F(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = M.\,k$$

sau

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n \equiv 0 \pmod k$$

și cele de două sau mai multe necunoscute ar fi:

$$F(x, y) = M.\,k, \quad \text{sau} \quad F(x, y, z) = M.\,k$$

unde $F(x, y)$, $F(x, y, z)$ sunt polinoame întregi de gradul n.

Lagrange (1768) și *Legendre (Récherches d'Analyse indéterminée*, 1785) și chiar *Euler* (referindu-se la $x^n - 1 \equiv 0$) au demonstrat propoziția:

Congruența

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = M.\,k$$

are cel mult n rădăcini, dacă modulul k este un număr prim, ce nu divide coeficientul A_0 *(Ch. Fr. Gauss: Recherches Aritmétiques. Traduites par A.-C.-M. Poullet-Delisle.* Paris 1910, pag. 28).

Se știe că congruențele de gradul prim cu una sau două necunoscute

$$ax + b = M.\,k, \quad \text{sau} \quad ax + by + c = M.\,k$$

se rezolvă ca și ecuațiile

$$aX + b = kY \quad \text{sau} \quad aX + bY + c = kZ$$

în numere întregi *(Gauss: Recherches Aritmétiques, pag. 12)*.

Congruențele de gradul doi [1]

$$ax^2 + bx + c = M\,k$$

scriindu-se

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac + M\,4ak$$

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac, \pmod{4ak}$$

se reduc la rezolvarea congruenței

$$y^2 \equiv D, \pmod h$$

care a fost studiată de *Gauss, Legendre, Dirichlet*, etc.

2°. In cele ce urmează voiu indica o metodă de rezolvat congruențele de gradul n, stabilind o relație de recurență care permite a găsi soluțiile x_m de m cifre, cunoscând soluțiile x_{m-1} de $(m-1)$ cifre, din aproape în aproape.

Dacă în congruența

$$(1)\quad F(x) \equiv A_0 x^n + A_1^{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = M\,k^p$$

de gradul n, ordinul p și baza k, facem substituțiile

$$(2)\qquad x = x_p + M.\,k^p, \qquad x_p < k^p$$

$$(2')\quad A_i = a_i + M.\,k^p, \quad a_i < k^p, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n$$

obținem

[1] Regretatul *Prof. G. Țițeica*, acum 40 ani, a dat un studiu riguros congruenței $x^2 - x \equiv 0 \pmod{b^p}$ în „*Gaz. Matematică*" vol. IX, pag. 77 și 101.

(3) $F(x_p) \equiv a_0 x_p^n + a_1 x_p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_p + a_n = M.k^p$

o congruență, ale cărei rădăcini de p cifre în baza k, ar fi de forma

(4) $$x_p = \alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1 =$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 k + \cdots + \alpha_p k^{p-1}, \quad (\alpha_i < k, i = 1, \ldots, p)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ reprezintă cifre, ce urmează a fi căutate.

Pentru aceasta vom scrie pe (4) sub forma

(5) $x_p = x_{p-1} + \alpha_p k^{p-1} = x_{p-1} + h, \quad (h = \alpha_p k^{p-1})$

și aplicând funcțiunei $F(x_p)$ *formula lui Taylor* pentru polinoame:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)} x)$$

congruența (3) se scrie sub forma

$$F(x_{p-1}) + h F'(x_{p-1}) + \text{Mult } h^2 = \text{Mult } k^p$$

și ținând seama de valoarea lui h din (5) avem:

(6) $F(x_{p-1}) + k^{p-1} . F'(x_{p-1}) . \alpha_p = M. k^p, \quad (p \geq 2)$

o congruență de gradul prim în α_p, dacă se cunosc numerele x_{p-1}, precum se va vedea.

Fie acum x_{p-1}, ansamblul tuturor soluțiilor de $p-1$ cifre ale congruenței de ordinul $(p-1)$:

(7) $$F(x_{p-1}) = M. k^{p-1}$$

cifra α_p, de ordinul p din x_p, este dată de (6), care se mai scrie

(8) $$\frac{F(x_{p-1})}{k^{p-1}} + F'(x_{p-1}) . \alpha_p = M. k.$$

Dar din (7), având

(9) $$\begin{cases} F(x_{p-1}) = M\, k^{p-1} = d_p k^{p-1} + \text{Mult } k^p \text{ și} \\ F'(x_{p-1}) = b_p + \text{Mult } k^p \end{cases}$$

relația (8) se mai scrie

(10) $$d_p + b_p . \alpha_p = \text{Mult } k$$

care este o congruență de gradul și ordinul prim și ne va da pe α_p, ea rezolvându-se ca ecuația cu două necunoscute în numere întregi:

(10′) $$d_p + b_p X = k Y.$$

Făcând acum $p = 2, 3, 4, .., p-1$, *congruența de recurență* (8), dă un șir de congruențe de gradul și ordinul prim de forma (10), care ne vor da în șir pe $\alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_{p-1}$, iar (8) ne va da pe α_p, dacă cunoaștem inițial pe α_1, ca soluție a congruenței de bază.

(11) $F(\alpha_1) \equiv a_0 \alpha_1^n + a_1 \alpha_1^{n-1} + \cdots + a_n = M. k \; (p=1)$

unde $a_i < k$, $\alpha_1 < k$, iar $(A_i \equiv a_i \bmod k)$.

In fond rezolvarea congruenței (1) se înlocuește cu rezolvarea congruenței (11) și a șirului de congruențe (10).

Rădăcinile congruenței (11) în condiția $\alpha_1 < k$ pot fi una sau cel mult toate numerele: $0, 1, 2, .. \; k-1$. Deci printr'un număr limitat de simple verificări, găsim soluțiile α_1 ale congruenței (11). (In baza 10, încercăm $0, 1, 2, \ldots, 9$).

Ușurința rezolvării congruenței (11) se va evidenția și în exercițiul trecut la finele articolului:

Rezumat. Congruența cu o necunoscută

I $F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = M. k^p$

are ca soluție generală

II $$x = x_p + \text{Mult } k^p$$

x_p fiind un număr de p cifre, scris în baza k, având forma

III $$x_p = \alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1 =$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 k + \cdots + \alpha_p k^{p-1}; \quad (\alpha_i < k)$$

α_1 fiind totalitatea soluțiilor *congruenței inițiale*

IV $$a_0 \alpha_1^n + a_1 \alpha_1^{n-1} + \cdots + a_n = M. k;$$

$$[\alpha_1 < k, A_i \equiv a_i \pmod k]$$

iar $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ sunt dați de *congruența de recurență* de gradul și ordinul prim de forma

V $$k^{i-1} . F(x_{i-1}) + F'(x_{i-1}) \alpha_i = M. k$$

sau

(V′) $$d_i + b_i \alpha_i = M. k; \quad (i = 2, 3, \ldots p)$$

și unde

VI $$F(x_i) = A_0 x_i^n + \cdots + A_n,$$

iar $F'(x_i)$ este derivata funcțiunei $F(x_i)$ în raport cu x_i ca variabilă.

Observare. Soluția generală II a congruenței I, are k are divizori, iar congruențele V au anumite restricții, se prezintă sub forma

II′ $x = x_p + \mathrm{M}.\, k_1^{p_1}.\, k_2^{p_2} \cdots k_r^{p_r}$

$k_1, k_2, \ldots, k_r$ fiind divizorii lui k, iar $p_1, p_2, \ldots, p_r \leqq p$.

3°. *Congruențe cu mai multe necunoscute.* Vom rezolva congruențele cu două necunoscute, cele cu mai multe necunoscute rezolvându-se la fel.

Fie

(12) $$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{M}.\, k^p$$

o congruență cu două necunoscute de gradul n, ordinul p și baza k, de rezolvat în numere întregi.

Prin analogie cu (4) facem substituția

(13) $$x = x_p + \mathrm{M}.\, k^p, \quad y = y_p + \mathrm{M}.\, k^p$$

unde x_p, y_p fiind numere întregi de p cifre scrise în baza k, sunt de forma

(14) $$\begin{cases} x_p = \alpha_p\, \alpha_{p-1} \ldots \alpha_2\, \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2\, k + \cdots + \alpha_p\, k^{p-1} \\ y_p = \beta_p\, \beta_{p-1} \ldots \beta_2\, \beta_1 = \beta_1 + \beta_2\, k + \cdots + \beta_p\, k^{p-1} \end{cases}$$

care scriindu-le sub forma:

(15) $$\begin{cases} x_p = x_{p-1} + \alpha_p \,.\, k^{p-1} = x_{p-1} + h; \quad h = \alpha_p\, k^{p-1} \\ y_p = y_{p-1} + \beta_p \,.\, k^{p-1} = y_{p-1} + l; \quad l = \beta_p\, k^{p-1} \end{cases}$$

și având în vedere *formula lui Taylor*

$$f(x + h, y + l) = f(x, y) +$$

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + l\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f + \cdots$$

congruența (12) se mai scrie succesiv

$$\mathrm{F}(x_p, y_p) = \mathrm{M}.\, k^p; \quad (x_p, y_p < k^p)$$

$$\mathrm{F}(x_{p-1}, y_{p-1}) + k^{p-1}\left(\alpha_p \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{p-1}} + \beta_p \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{p-1}}\right) +$$

$$k^{2p-2}(\ldots) = \mathrm{M}.\, k^p$$

(16) $$\mathrm{F}(x_{p-1}, y_{p-1}) + k^{p-1}\left(\alpha_p \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{p-1}} + \beta_p \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_{p-1}}\right) +$$

$$\mathrm{M}.\, k^p; \quad (p \geqq 2).$$

Cunoscând soluțiile congruenței de ordul $p-1$

(17) $$\mathrm{F}(x_{p-1}, y_{p-1}) = \mathrm{M}.\, k^{p-1}$$

și anume x_{p-1}, y_{p-1}, cifrele α_p, β_p ale numerelor (14) sunt date de (16), care se mai scrie

(18) $$\frac{\mathrm{F}(x_{p-1}, y_{p-1})}{k^{p-1}} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{p-1}} \cdot \alpha_p + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_{p-1}} \cdot \beta_p = \mathrm{M}.\, k$$

(18′) $$\alpha_p + c_p \,.\, \alpha_p + b_p \,.\, \beta_p = \mathrm{M}.\, k$$

și este o congruență de gradul și ordinul prim cu două necunoscute α_p și β_p, rezolvându-se ca ecuația cu trei necunoscute în numere întregi:

(19) $$\alpha_p + c_p\, \mathrm{X} + b_p\, \mathrm{Y} = k\, \mathrm{Z}.$$

Congruența de recurență (18), făcând $p = 2, \ldots, p$, ne dă pe α_1, β_1; α_2, β_2; ...; α_p, β_p, dacă cunoaștem soluția inițială α_1, β_1, dată de congruența inițială

(20) $$\mathrm{F}(\alpha_1, \beta_1) = \mathrm{M}.\, k; \quad (\alpha_1, \beta_1 < k)$$

soluționată în numere întregi, ca și (11).

Rezumat. Congruența cu două necunoscute.

I $$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{M}.\, k^p$$

are ca soluție generală pe

II $$x = x_p + \mathrm{M}.\, k^p, \quad y = y_p + \mathrm{M}.\, k^p$$

unde x_p, y_p sunt numere de p cifre în baza k, de forma

III $$\begin{cases} x_p = \alpha_p\, \alpha_{p-1} \ldots \alpha_2\, \alpha_1; & (\alpha_i < k) \\ y_p = \beta_p\, \beta_{p-1} \ldots \beta_2\, \beta_1; & (\beta_i < k) \end{cases}$$

cifrele α_1 și β_1 fiind totalitatea soluțiilor inițiale ale congruenței inițiale

IV $$\mathrm{F}(\alpha_1, \beta_1) = \mathrm{M}.\, k \qquad (\alpha_1, \beta_1 < k)$$

iar α_2, β_2; α_3, β_3; ...; α_p, β_p sunt date de congruența de recurență

V. $$\mathrm{F}(x_{i-1}, y_{i-1}) + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{i-1}} \alpha_i + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_{i-1}}\right) \cdot k^{i-1} = \mathrm{M}.\, k^i$$

care se scrie sub forma

(V′) $$\alpha_i + c_i \,.\, \alpha_i + b_i \beta_i = \mathrm{M}.\, k, \qquad (i = 2, 3, \ldots, p)$$

și unde $\mathrm{F}(x, y)$ e o funcțiune întreagă de gradul n, iar $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$, derivatele parțiale de ordinul prim ale funcției $\mathrm{F}(x, y)$.

Observări. 1). Soluția generală a congruenței I, în cazul când k, are divizori, se poate prezenta și sub forma

$$x, y = x_p, y_p + \mathrm{M}.\, k_1^{p_1}.\, k_2^{p_2} \cdots k_r^{p_r}; \quad (x_p, y_p < k)$$

unde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sunt divizorii lui k, iar $p_1, p_2, \ldots, p_r \leqq p$.

2). Metoda de rezolvat congruențele cu două

necunoscute se aplică în mod analog şi congruenţelor cu mai multe necunoscute.

4°. **Aplicaţii.**

1), *So se rezolve şi să se discute congruenţa*

$$x^2+2x+2\lambda+1=\text{M.}10^2.$$

Soluţie. Congruenţa iniţială fiind

$$f(x)=x^3+2x+2\lambda+1=\text{M.}10$$

$$\begin{aligned}
f(1)&=4+2\lambda \overset{*}{*}\overset{*}{*} 4+2\lambda=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} \lambda=-2+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=1+10m_1\\
f(3)&=34+2\lambda \overset{*}{*}\overset{*}{*} 4+2\lambda=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} \lambda=-2+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=3+10m_1\\
f(5)&=126+2\lambda \overset{*}{*}\overset{*}{*} 6+2\lambda=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} \lambda=2+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=5+10m_1\\
f(7)&=358+2\lambda \overset{*}{*}\overset{*}{*} 8+2\lambda=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} \lambda=1+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=7+10m_1\\
f(9)&=748+2\lambda \overset{*}{*}\overset{*}{*} 8+2\lambda=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} \lambda=1+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=9+10m_1.
\end{aligned}$$

Deci congruenţa de ordinul prim

$$x^3+2x+2\lambda+1=\text{M.}10$$

are ca soluţie generală

$$x=(1,3,5,7.9)+10m_1$$

respectiv pentru

$$\lambda=(-2,-2,2,1,1)+5\lambda_1.$$

Congruenţa de gradul trei şi ordinul doi:

$$f(x)=x^3+2x+2\lambda+1=\text{M.}10^2$$

va avea ca soluţie generală

$$x=x_1+10m_1$$

unde x_1 putând fi printre $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Dar $f(0), f(2), f(4), f(6), f(8)$ fiind numere fără soţ, oricare ar fi λ, cifrele cu soţ nu pot fi soluţii iniţiale.

Pentru cifrele fără soţ, obţinem:

spre a fi satisfăcută de soluţia generală a congruenţei de ordinul prim $x=x_1+10m_1$, va trebui ca

$$f(x_1)+10f'(x_1).m_1=\text{M.}10^2$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \frac{f(x_1)}{10}+f'(x_1).m_1=\text{M.}10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \frac{x_1^3+2x_1+2\lambda+1}{10}+(3x_1+2)m_1=\text{M.}10.$$

Dăm lui $x_1=1, 3, 5, 7, 9$ şi lui λ respectiv $(-2,-2,2,1,1)+5\lambda_1$ avem de cercetat cazurile:

$$x_1=1 \text{ şi } \lambda=-2+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} \lambda_1+5m_1=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} m_1=-\frac{\lambda_1}{5}+2m_2;\qquad \lambda_1=5\lambda_2$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\ \lambda_1=5\lambda_2 \qquad \overset{*}{*}\overset{*}{*}\ m_1=-\lambda_2+2m_2 \overset{*}{*}\overset{*}{*}\ x=1-10\lambda_2+20m_2$$

$$\begin{aligned}
x_1=3 \text{ şi } \lambda&=-2+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} 3+\lambda_1+11m_1=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} m_1=-3-\lambda_1+10m_2 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=-27-10\lambda_1+100m_2\\
x_1=5 \text{ şi } \lambda&=2+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} 4+\lambda_1+7m_1=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} m_1=-2-3\lambda_1+10m_2 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=-15-30\lambda_1+100m_2\\
x_1=7 \text{ şi } \lambda&=1+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} 6+\lambda_1+3m_1=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} m_1=-2+3\lambda_1+10m_2 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=-13+30\lambda_1+100m_2\\
x_1=9 \text{ şi } \lambda&=1+5\lambda_1 \overset{*}{*}\overset{*}{*} 5+\lambda_1+9m_1=\text{M.}10 \overset{*}{*}\overset{*}{*} m_1=5+\lambda_1+10m_2 \overset{*}{*}\overset{*}{*} x=59+10\lambda_1+100m_2
\end{aligned}$$

Deci congruenţa admite soluţii numai pentru

$$\lambda=-2+25\lambda'$$

şi anume

$$x=1-10\lambda'+20m$$

şi

$$\lambda=(-2,+2,1,1)+5\lambda'$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\ x=(-27-10\lambda';\ -15-30\lambda';\ -13+30\lambda';$$
$$+59+10\lambda')+100m$$

unde λ' şi m sunt întregi oricare.

2). *Să se afle două patrate perfecte terminate la dreapta cu un acelaş grup de cifre.*

Fie x şi y, rădăcinile patratelor căutate, x^2 şi y^2 fiind terminate cu grupul final de p cifre (F_p) avem

$$x^2=F_p+10^p.A$$

$$y^2=F_p+10^p.B.$$

Scăzându-le, obţinem congruenţa problemei şi anume

$$x^2-y^2=\text{M.}10^p.$$

Soluţia completă, pentru $p=1,2,3$ şi 4 se va publica în *„Gazeta Matematică“*. Patratele x^2 şi y^2 se numesc *„patrate isofinale“*.

3). *Să se afle două cuburi perfecte, terminate la dreapta cu un anumit grup final de p cifre.*

Fie x şi y rădăcinile cubice căutate, avem analog

$$x^3 - y^3 = M.10^p.$$

Cuburile soluţiilor ei se numesc *„cuburi isofinale“* şi vor apare într'un articol aparte în *„R. M. T.“* pentru

$$p = 1, 2, 3 \text{ şi } 4.$$

4). *Să se afle cuburile perfecte, care reproduc la dreapta rădăcina cubică a lor.*

Fie x rădăcina cubică a lor, suntem conduşi a rezolva congruenţa

$$x^3 - x = M.10^p.$$

Obiectul acestei probleme este publicat în *„R.M.T“ vol. XXIII.* Problema 2171.

NOTE MATEMATICE

1. — *Une solution à deux paramètres de l'ébuation multiple*

$$A_1, A_2 \ldots A_7 \overset{x}{=} B_1, B_2 \ldots B_5,$$
$$(x = 1, 3, 5).$$

On a l'identité multiple

$$pq, 2p^2-q^2, 4pq-q^2, 4p^2-pq, p^2-pq+q^2,$$
$$2p^2-4pq+q^2, \quad 3p^2+pq-q^2 \overset{x}{=}$$
$$2p^2-pq, 2p^2+pq, 4p^2-q^2,$$
$$p^2+3pq-q^2, 3p^2-3pq+q^2$$
$$(x = 1, 3, 5)$$

Exemples

α) $p = 2, q = 1,$

$$1, 2, 3, 7, 13, 14 \overset{x}{=} 6, 9, 10, 15$$

$$S_1 = 40, \qquad S_3 = 5320, \qquad S_5 = 926.200,$$

(ici deux termes sont identiques ce qui réduit le nombre de termes dans chaque membre, d'une unité).

β) $p = 3, \ q = 1$;

$$3, 7, 7, 11, 29, 33 \overset{x}{=} 15, 19, 21, 35$$

[même remarque que pour α]

$$S_1 = 90, \qquad S_3 = 62.370, \qquad S_5 = 59.841.450.$$

A. GLODEN.

2. — *Zum Stand der simultanen identitäten.*

I. Eine simultane Identität von der Form

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \overset{k}{=} B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

nennt man eine normale Multigrade. Bis jetzt existieren normale Multigraden bis $n = 10$, während normale Multigrade mit beiderseits mehr als 10 Zahlen noch nicht gefunden wurden. Ich gebe nachfolgend je ein Exempel für die bis jetzt bekannten normalen Multigrade in möglichst kleinen Zahlen an.

(1) $\quad 1, 5, 6 \overset{2}{=} 2, 3, 7 \qquad (n = 3);$

(2) $\quad 1, 5, 8, 12 \overset{3}{=} 2, 3, 10, 11 \qquad (n = 4);$

(3) $\quad 1, 5, 9, 17, 18 \overset{4}{=} 2, 3, 11, 15, 19 \qquad (n = 5);$

(4) $\quad 1, 6, 7, 17, 18, 23 \overset{5}{=} 2, 3, 11, 13, 21, 22 \qquad (n = 6);$

(5) $\quad 1, 19, 28, 59, 65, 90, 102 \overset{6}{=} 2, 14, 39, 45, 76, 85, 103 \qquad (n = 7);$

(6) $\quad 1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51 \overset{7}{=} 2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50 \qquad (n = 8);$

(7) $\quad 1, 25, 31, 84, 87, 134, 158, 182, 198 \overset{8}{=} 2, 18, 42, 66, 113, 116, 169, 175, 199 \qquad (n = 9);$

(8) $\quad 1, 3084, 3302, 11894, 23315, 24187, 35608, 44200, 44418, 47502 \overset{9}{=}$

$\quad 13, 2866, 3520, 11870, 23739, 23763, 35632, 43982, 44636, 47489 \qquad (n = 10).$

II. Ich gebe einige numerische Solutionen zu Multigraden von der Form

$$C_1, C_2, C_3 \overset{k}{=} D_1\, D_2\, D_3 \qquad (k = a, b)$$

(1) $\quad 1, 5, 5 \overset{k}{=} 2, 3, 6 \qquad (k=1, 3);$

(2) $\quad 3, 25, 38 \overset{k}{=} 7, 20, 39 \qquad (k=1, 4);$

(3) $\quad 49, 75, 107 \overset{k}{=} 39, 92, 100 \qquad (k=1, 5);$

(4) $\quad 193, 193, 432 \overset{k}{=} 1, 336, 385 \qquad (k=2, 3);$

(5) $\quad 1, 9, 10 \overset{k}{=} 5, 6, 11 \qquad (k=2, 4);$

(6) $\quad 3, 19, 22 \overset{k}{=} 10. 15, 23 \qquad (k=2, 6).$

In der „Rev. Matem. din Timşoara" vom Dezember 1943 gibt Herr *Gloden* mehrere Formeln zur Lösung der Relation

$$C_1, C_2, C_3 \overset{k}{=} D_1, D_2, D_3 \qquad (k = 2, 3).$$

Die Formeln des Herrn *Gloden* ergeben numerische Lösungen, in welchen auch negative Zahlen vorkommen. Herr *Birck* gibt für die Lösung von

$$C_1, C_2, C_3 \overset{k}{=} D_1, D_2, D_3$$

für $k = 2, 3$ folgende Formel:

$$C_1 = N - a\,x;\ C_2 = P + a\,x;\ C_3 = M + x;$$

$$D_1 = N + a\,x;\ D_2 = P - a\,x;\ D_3 = M - x;$$

wobei

$$N = 1 + \frac{a+1}{12\,a} \cdot x^2;\ P = 1 + \frac{a-1}{12\,a} \cdot x^2;\ M = \frac{x^2}{6}$$

und x beliebig ist.

Exempel: $x = 48$ ergibt

$$193, 193, 432 \overset{k}{=} 1, 336, 385 \qquad (k=2, 3);$$

$x = 54$ ergibt

$$325, 163, 540 \overset{k}{=} 487, 1, 432 \qquad (k=2, 3).$$

ALFRED MOESSNER

---

3. — *Sur l'yperbole équilatère circonscrite à un triangle.* 1. Considérons une hyperboble équilatère (H) dont le centre est un point φ du cercle (O_9) des neuf points d'un triangle ABC. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés BC, CA, AB; (O) le cercle circonscrit. Par l'orthocentre H, menons des droites $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ qui coupent, dans le même sens les droites $\varphi A_1, \varphi B_1, \varphi C_1$ sous un même angle θ. Ces droites $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ rencontrent respectivement BC, CA, AB, en α, β, γ. Marquons sur (O_9) un point φ_1 tel que la corde $\varphi\varphi_1$ soit vue du centre O_9 sous l'angle 2θ, de même sens que θ. Les droites φA_1, $\varphi B_1, \varphi C_1$ sont parallèles à $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$, de sorte que *les points α, β, γ sont collinéaires.* 2. Pour une position arbitraire du point φ sur (O_9), θ étant également arbitraire, les droites $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$, et par suite $H\alpha$, $H\beta, H\gamma$, déterminent deux à deux des angles constants égaux à chacun des angles du triangle ABC, ou à leurs suppléments Dès lors, *la droite $\Delta \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ enveloppe une conique, de foyers* H *et* O, *inscrite au triangle* ABC. En outre, *les points φ_2, φ_3 d'intersections du cercle (O_9) avec les droites $O_9\varphi_1, H\varphi_1$, sont sur la droite Δ qui est parconséquent perpendiculaire à $H\varphi_1$.*

D'ailleurs, en vertu de propriétés connues[1] *la transversale réciproque de Δ est un diamètre du cercle* (O), *dont l'orthopôle est φ_3.*

N. B. Si φ est un des points de *Feuerbach* du triangle ABC et si $\theta = 90^0$, on retrouve des propriétés que nous avons déjà données, *(Mathesis,* 1935—169, question *2903).*

V. THÉBAULT

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLIX, No. 6, Februarie 1944. Indicatori, puteri de numere întregi, *M. Ghermănescu.* Asupra cercurilor de asemănare, de *Şerban Gheorghiu.* Probleme de geometrie, de *Adrian Gheorghiu.* Concursul „Gazetei Matematice". Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Pozitiva,* Anul IV, Nrile 1—2, Noembrie—Decembrie 1943. Lista membrilor. Despre ecuaţiile diferenţiale lineare integrabile prin generalizarea transformării lui *Laplace,* de *G. G. Constantinescu.* Exerciţii propuse.

3. *Cercul Matematic,* Revista liceului „*T. Vladimirescu*", Tg.-Jiu, No. 1. Probleme propuse şi rezolvate.

4. *Piotr Szymanski.* Sur une correspondance effective entre l'ensemble des fonctions continues et un ensemble des nombres réels. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara", T. 11, Fasc. 3—4).

5. *Gr. C. Moisil.* Sur le passage des variables de *Lagrange* aux variables d'*Euler* en hidrodynamique. (Extrait du Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, T. 44, Fasc. 1—2, Bucarest, 1942).

6. *Michel Ghermănescu.* Sur quelques équations fonctionnelles. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara", T. 11, Fasc. 3—4).

7. *M Ghermănescu.* Ecuaţia $x^2 + y^2 = a\,z^n$ în întregi. (Extras din „R. M. T", Anul XXIII, No. 10).

---

(1) *Journal de Vuibert, Meytelon,* 36-e anné, p. 7.

8. *E. Arghiriade.* Sur la géometrie biaxiale des courbes gauches. (Extrait du „Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences", T. 44 1—2, Bucarest, 1942).

9. *E. Arghiriade.* Sur une courbe caracteristique d'une courbe plane ou gauche. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara", T. 11, Fasc. 1—2, 1943).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1981. — *Se prelungeşte arbitrar diametrul unui cerc* O *şi într'un punct oarecare* C *se duce o perpendiculară. Prin acelaş punct se duce o secantă la cerc. Fie* B *şi* D *punctele de intersecţie cu cercul. In aceste puncte se duc tangentele la cerc, care taie perpendiculara dusă pe diametru în punctele* A, E.

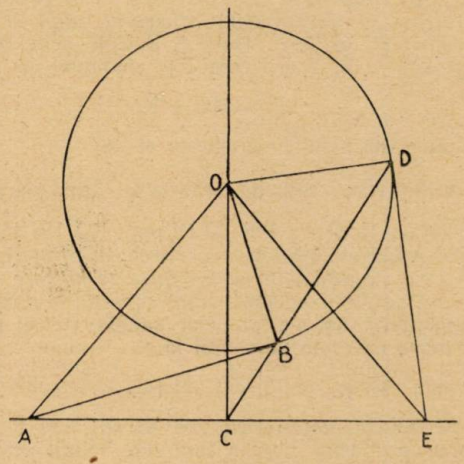
1°. *Să se demonstreze că* AC = CE.

2°. *Problema este aceiaşi şi când punctul* C *este interior cercului.*

EMANOIL I. SARULESTEANU

Soluţie. 1°. Patrulaterele AOBC şi CODE sunt inscriptibile, ca având câte două unghiuri opuse drepte, de unde rezultă

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCD = \sphericalangle OED.$$



De aci deducem că triunghiurile dreptunghice AOB şi EOD sunt egale ca având câte un unghiu ascuţit ($\sphericalangle A = \sphericalangle E$), precum şi catetele opuse lor egale ca raze ale cercului O, de unde urmează

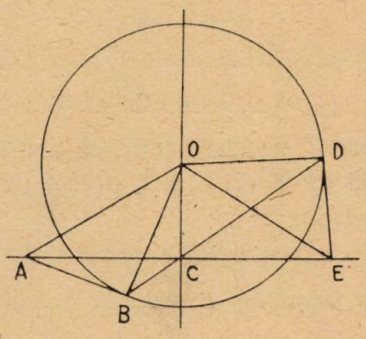
$$AO = OE.$$

Cum faţă de dreapta AE, segmentele AO şi OE sunt oblice egale, rezultă că sunt egal departate de piciorul perpendicularei dusă din O pe AE, urmează deci,

$$AC = CE,$$

tocmai ceea ce se cerea de dovedit.

2°. Demonstraţia este absolut analoagă,



pentru cazul când punctul C este în interiorul cercului.

Soiuţii date de d-nii: *Anton Ion* (Polit., Timişoara), *Boerescu P. G.* (Lt., Constanţa), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Kinsky Ioan* (Timişoara), *Luca L. Laurenţiu* (Polit., Timişoara), *Sabău C.* (Polit., Timişoara) şi *Stretea I Alexandru* (Polit., Timişoara).

Observare. D-l *Kinsky Ioan* (Timişoara) a dat şi o soluţie analitică.

Problema 1994. — *Să se reconstitue împărţirea*

$$\begin{array}{r|l} abcd & efgh \\ \hline j & i \end{array}$$

unde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ *sunt cifre distincte.*

V. THÉBAULT

Soluţie. Problema cere să se găsească 4 numere formate din întrebuinţarea câte o singură dată a celor 10 cifre ale sistemului zecimal, aşa în cât:

$$abcd = i \times efgh + j.$$

Pentru rezolvare, dăm pe rând lui i şi j toate valorile posibile şi apoi căutăm valorile celorlalte cifre, prin încercări, făcând bine înţeles prescurtări de calcul acolo unde se poate, sau eliminări când este cazul. In rezolvarea acestei probleme se cere numai răbdare şi o atenţie susţinută la calculele care se reduc la operaţii de înmulţire şi adunare.

Observăm de la început că $i > 1$, iar j poate avea pe rând toate valorile de la 0 la 9 inclusiv. Vom examina un caz şi apoi vom înscrie numai rezultatele pentru toate celelalte cazuri. Fie de exemplu $i = 5$, $j = 2$, deci, în condiţiile enunţului

$$a\,b\,c\,d = 5 \times e\,f\,g\,h + 2.$$

Pentru ca egalitatea să aibă loc, trebue ca $e < 2$, deci

$$e = 0, \text{ sau } 1.$$

Fie $e = 0$, la fel se examinează celălalt caz. Deci

$$a\,b\,c\,d = 5 \times 0\,f\,g\,h + 2$$

h nu poate fi pereche pentru că atunci $5 \times h + 2$ se termină cu 2, ori $d \neq 2$, deci h este nepereche în care caz

$$a\,b\,c\,7 = 5 \times 0\,f\,g\,h + 2.$$

Dăm pe rând lui h valorile 1, 3, 9. Fie $h = 3$. Avem

$$a\,b\,c\,7 = 5 \times 0\,f\,g\,h\,3 + 2$$

$$5g + 1 = 10e + c \qquad (*_*)$$

Dăm lui g valori diferite de cifrele aflate. Pentru $g = 6$ de exemplu, avem $c = 1$ şi relaţia din enunţ devine

$$a\,b\,1\,7 = 5 \times 0\,f\,6\,3 + 2$$

$$5f + 3 = 10e' + b \qquad (*_*)$$

unde b nu poate fi decât 3 sau 8. Cum 3 intră deja în compunerea numerelor căutate, rămâne

$$b = 8,$$

care necesită f nepereche şi anume 9, singura cifră nepereche neîntrebuinţată. Cu această cifră găsim soluţia

$$4817 = 5 \times 0963 + 2.$$

La fel, examinăm toate cazurile posibile. Simplificări se mai pot obţine şi din dispoziţia calculor, care este proprie fie-cărui rezolvitor. Am găsit următoarele 43 soluţii aranjate pe grupe după valorile crescând ale lui j şi în fie-care grupă după valorile crescânde ale lui i:

$3956 = 2 \times 1478 + 0$; $7916 = 2 \times 3458 + 0$;
$7852 = 4 \times 1963 + 0$; $2584 = 7 \times 0369 + 1$;
$4852 = 7 \times 0693 + 1$; $7435 = 9 \times 0826 + 1$;
$4817 = 5 \times 0963 + 2$; $5781 = 9 \times 0642 + 3$;
$6428 = 9 \times 0715 + 3$; $1879 = 3 \times 0625 + 4$;
$5670 = 3 \times 1892 + 4$; $7819 = 3 \times 2605 + 4$;
$3178 = 6 \times 0529 + 4$; $1743 = 2 \times 0869 + 5$;
$6819 = 2 \times 3407 + 5$; $7401 = 2 \times 3698 + 5$;
$8139 = 2 \times 4067 + 5$; $8163 = 2 \times 4079 + 5$;
$8619 = 2 \times 4307 + 5$; $7309 = 4 \times 1826 + 5$;
$7829 = 6 \times 1304 + 5$; $2896 = 7 \times 0413 + 5$;
$9826 = 7 \times 1403 + 5$; $1973 = 8 \times 0246 + 5$;
$2917 = 8 \times 0364 + 5$; $2941 = 8 \times 0367 + 5$;
$4973 = 8 \times 0621 + 5$; $6341 = 8 \times 0792 + 5$;
$7413 = 8 \times 0926 + 5$; $7461 = 8 \times 0932 + 5$;
$9637 = 8 \times 1204 + 5$; $7512 = 9 \times 0834 + 6$;
$3605 = 2 \times 1849 + 7$; $1482 = 3 \times 0695 + 7$;
$6184 = 3 \times 2059 + 7$; $4812 = 5 \times 0963 + 7$;
$6950 = 2 \times 3471 + 8$; $7046 = 2 \times 3519 + 8$;
$7106 = 2 \times 3549 + 8$; $9530 = 2 \times 4761 + 8$;
$5427 = 3 \times 1806 + 9$; $6480 = 3 \times 2157 + 9$;
$2835 = 6 \times 0471 + 9.$

Notă: 1⁸. A dat soluţia parţială $8619 = 4307 \times 2 + 5$, d-l *Manolache Mircea* (Lic. Internat. Iaşi).

2⁹. — D-l *V. Thébault* a dat în supliment la *Mathesis* Vol. XLIX soluţii la o problemă analoagă cu următorul enunţ: *Cu cifrele* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *să se formeze patru numere care să fie dividentul, divizorul, câtul şi restul în minus al unei diviziuni.* Dacă A, B, C, R sunt cele patru numere şi $R < B$, atunci condiţiile enunţului cer

$$A = B.C + R.$$

Exemple din soluţiile publicate acolo

$364 = 287 \times 1 + 59$; $689 = 123 \times 5 + 574$; $826 = 49 \times 17 + 23$; ...

3⁶. Tot în *Mathesis* Vol. XLIX pag. 123, D-l *V. Thébault* a propus problema 2890 în care cere ca, *cu cifrele* 1, 2, 3, ... 8, 9 *luate câte o singură dată să se formeze numere* 4, 3, 1 *şi* 1 *cifre care să fie dividentul, câtul şi restul în minus al unei diviziuni.* Încă nu s-a publicat soluţia acestei probleme. Iată câte-va exemple de soluţii la ea

$1879 = 625 \times 3 + 4$; $4973 = 8 \times 621 + 5$; $7512 = 9 \times 834 + 6$; ...

4⁶. In *Gazeta Matematică* Vol. XLVIII, D-l *V. Thébault* a propus problema 5716 în care cere soluţii pentru cazul

$$a\,b\,c = d\,e\,f + g\,h\,i + j.$$

Soluţia acestei probleme nu s-a publicat încă. Iată un exemplu

$$940 = 652 + 287 + 1; \ldots$$

In fine tot D-l *V. Thébault* a propus în *Gazeta Matematică* Vol. XLV pag. 109 problema 5196 în care cere mai

general, ca cu cele 10 cifre ale sistemului zecimal să se formeze patru numere așa în cât între ele să existe relația

$$A = B \times C + R$$

cu condiția $R < B$. — Iată 2 exemple -

$$4608 = 917 \times 5 + 23; \qquad 1950 = 624 \times 3 + 78; \ldots$$

Nici soluția acestei probleme nu s-a publicat încă.

G-l Gh. B.

Problema 2031. — *Printr'un punct* A *al unui cerc se duc coardele* AB, AC *și* AD, *astfel ca* AD *să bisecteze unghiul* BAC.

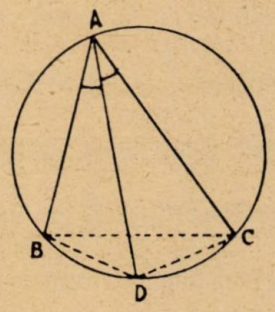
Să se demonstreze inegalitatea

$$\overline{AD} > \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}.$$

P. B BOLDESCU

Soluție. Construim figura în condițiile problemei și aplicând teorema lui *Ptolomeu* patrulaterului ABCD, avem

$$(1) \qquad \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$



Cum prin ipoteză $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$, urmează că $\overline{CD} = \overline{BD}$ și relația (1) devine

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD}(\overline{AB} + \overline{BC}),$$

sau

$$(2) \qquad \overline{AD} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}(\overline{AB} + \overline{AC}).$$

Dar, în triunghiul BDC avem

$$\overline{BC} < \overline{BD} + \overline{CD} = 2\,\overline{BD},$$

de unde

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} > \frac{1}{2}.$$

Ținând seamă de această inegalitate, relația (2) devine

$$\overline{AD} > \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2},$$

tocmai relația din enunț

Soluții date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Barbu Virgil* (Polit., Timișoara), *Bitang Alexandru* (Polit., Timișoara), *Enache Ion* (Slt., Giurgiu), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timișoara), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timișoara). *Grigoriu N.* (Lic. Maiorescu, București), *Ieșan Șt. Alexandru* (Lic. Matei Basarab, București), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Isfanu Teofil* (Lic. Român-Vârșeț), *Knopf Hermann* (Lic. Banația, Timișoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timișoara), *Preda I D-tru* (Lic., Slatina), *Ștefănescu Marin* (Lt., Brăila), *Stretea Alexandru* (Beiuș) și *Turicu Octavian.*

Problema 2034. — *Să se găsească un număr de cinci cifre, în care cifra mijlocie este zero, numărul format de primele două cifre este dublul celui format de ultimele două, care număr să fie produsul unui număr de două cifre prim altul de trei, ce se obține din primul intercalând un zero printre cifrele acestuia.*

M. GHERMANESCU

Soluție. Fie N numărul de cinci cifre, A numărul format de ultimele două cifre ale acestuia. Enunțul conduce la

$$N = 10^3(2A) + A = 2001\,A = 3.23.29\,A$$
$$= (10x + y)(100x + y).$$

Cum primul membru este divizibil prin 3, unul din factorii membrului al doilea este divizibil prin 3, însă în acest caz și celalt se divide prin 3, deci $A = 3A_1$. Va trebui să desfacem produsul $3.23.29.3A_1$ în doi factori, fiecare conținând pe 3, astfel ca unul să fie de două cifre, iar celalt de trei. Se vede ușor că singurele combinații posibile sunt

$$10x + y = 3.23 = 69, \qquad 100x + y = 29A = 609,$$
$$10x + y = 3.29 = 87, \qquad 100x + y = 23A = 807,$$

dintre care, numai prima dă soluția unică

$$N = 4201 = 69.609, \qquad 42 = 2.21.$$

Notă 1°. Au rezolvat foarte bine problema, cu soluții puțin diferite de cea mai sus, D-nii: *Barbu Virgil*, Locot., *C. Chiriac*, *Creța Gavril* și *Enăchescu Gr. Ion.*

2°. Au găsit soluția 42021 prin încercări mai mult sau mai puțin argumentate, D-nii: *Anton Ion*, *Godea Ion*, *L. Grozescu*, *P. Ionescu*, *H. Knopf*, *C. Lupescu*, *A. Mutiu*, *V. Pălăceanu*, *E. Șipoș*, *M. Ștefănescu* și *A. B. Vasiliu.*

3°. Un corespondent, elev cl. VIII, deduce, din $10a + b = 2(10c + d)$, $a = 2c$, $b = 2d$!! M. G.

Problema 2038. — *Să dă un trapez* ABCD, *în care cunosc*

$$AC = \alpha, \quad BD = \beta,$$

iar o dreaptă perpendiculară pe laturile paralele este împărțită de punctul de intersecție al diagonalelor în segmentele m și n.

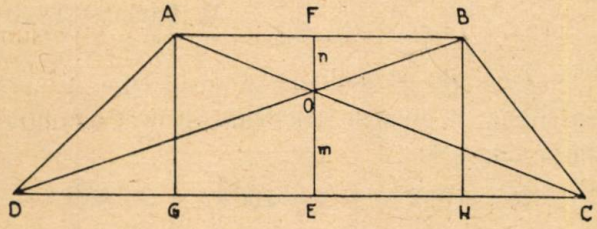
Se cere să se găsească:

1°. *Suprafața trapezului.*

2°. *Unghiul sub care se tae cele două diagonale.*

MIHAIL BOTEZ

Soluție. 1°. Fie trapezul ABCD, punctul O de intersecție al diagonalelor $AC = \alpha$, $BD = \beta$ și $FE \perp AB$ ce trece prin O, formând segmentele m și n.



Ducem înălțimele AG și BH, notăm $m + n = h$ și în triunghiurile dreptunghiurile GAC și PBD, avem

$$(1) \quad GC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AG}^2}, \quad DH = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{BH}^2}.$$

Cum, $AC = \alpha$, $BD = \beta$, $AG = BH = EF = h$, relațiile (1) devin

$$(2) \quad GC = \sqrt{\alpha^2 - h^2}, \quad DH = \sqrt{\beta^2 - h^2}.$$

Se observă pe figură că,

$$(3) \quad GC + DH = GC + DG + GH = DC + GH = DC + AB.$$

Acum, dacă S este suprafața trapezului, privind figura și ținând seamă de relația (3), de relațiile (2) și de faptul că $EF = h$, putem scri succesiv

$$S = \frac{(AB + DC)\,EF}{2} = \frac{(GC + DH)\,h}{2} =$$

$$\frac{(\sqrt{\alpha^2 - h^2} + \sqrt{\beta^2 - h^2})\,h}{2}.$$

Avem astfel calculată suprafața trapezului ABCD, în funcție de elementele date.

2°. Să calculăm acum unghiul DOC.

Observăm întâi că,

$$(4) \quad \sphericalangle DOC = \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOC.$$

Dar din figură rezultă

$$(5) \quad \begin{aligned} \sphericalangle DOE &= \sphericalangle DBH \\ \sphericalangle EOC &= \sphericalangle GAC. \end{aligned}$$

Cum, în triunghiurile dreptunghice HDB și GAC avem respectiv

$$\cos \widehat{DBH} = \frac{BH}{DB} = \frac{h}{\beta},$$

$$\cos \widehat{GAC} = \frac{AG}{AC} = \frac{h}{\alpha},$$

rezultă de aci

$$\sphericalangle DBH = \arccos \frac{h}{\beta}, \quad \sphericalangle GAC = \arccos \frac{h}{\alpha}.$$

In baza relațiilor (5), urmează că

$$\sphericalangle DOE = \arccos \frac{h}{\beta}, \quad \sphericalangle EOC = \arccos \frac{h}{\alpha} \text{ și}$$

înlocuind aceste valori în (4), găsim

$$\sphericalangle DOC = \arccos \frac{h}{\beta} + \arccos \frac{h}{\alpha}.$$

Am aflat astfel unghiul format de diagonale.

Observare. Se observă că nu era nevoie să se dea cele două segmente m și n, ci numai suma lor h.

Soluții date de d-nii: *Anton Ion* (Polit., Timișoara), *Barbu Virgil* (Polit., Timișoara), *Belea C. Gh.* (Lic., Beiuș), *Bitang Alexandru* (Polit., Timișoara), *Bordașiu I. Nicolae* (Lic., Beiuș), *Burghiu D. Ioan* (Lic. Maiorescu, București), *Creța F. Gavril* (Polit., Timisoara), *Enăchescu Gr. Ioan* (Lic., Milit., Timișoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timișoara), *Isfanu Teofil* (Lic., Român-Vârșeț), *Kinsky Ioan* (Timișoara), *Knopf Hermann* (Lic. Banația, Timișoara), *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Manolache Mircea* (Iași), *Mesch Josef* (Timișoara), *Moisă I. Gheorghe* (Slt.), *Muțiu Antim* (Pollt., Timșoara), *Olteanu Gr. Ioan* (Polit., Timișoara), *Pat Moise* (Polit., Timișoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timișoara), *Ștefănescu Marin* (Lt., Brăila), *Stretea Alexandru* (Polit., Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara), *Turicu T. Octavian* și *Vasiliu A. B.* (Lic., Chișinău).

PROBLEME PROPUSE

2209. — Să se găsească un număr de patru cifre egal cu de şase ori patratul sumei cifrelor sale.

V. THÉBAULT

2210. — De vacanţa Crăciunului a plecat spre Brăila un număr de studenţi dela Politehnica Timişoara, formând patru grupe, astfel ca numărul studenţilor din aceste grupe să crească în progresie geometrică, prima grupă având doi studenţi. Să presupunem că au plecat cu acceleratul şi că n'aveau toţi carnete de militari, astfel că unii au plătit mai mult decât alţii. Preţul unui bilet s'a fixat astfel : un student dintr'o grupă plăteşte de un anumit număr de ori mai mult decât un alt student din grupa precedentă.

Ştiind că un student din grupa întâia a plătit un bilet cu 840 lei, iar banii strânşi numai de la ultima grupă sunt 45360 lei şi că raportul dintre suma dată de grupa doua şi numărul tuturor studenţilor este 168, se cere :

1°. Numărul studenţilor în total şi din fiecare grupă în parte.

2°. Suma strânsă de pe biletele vândute tuturor studenţilor.

3°. De câte ori a costat mai mult un bilet al unui student dintr'o grupă faţă de costul unui bilet al unui student din grupa precedentă.

AL TIGANOIU

2211. — Există un patrat perfect care, urmat de rădăcina sa patrată mărită cu o unitate, să ne dea alt patrat perfect ?

M. GHERMANESCU

2212. — Fie I şi O centrul cercului înscris şi al cercului circumscris unui triunghiu ABC. Dreapta IO taie laturile triunghiului în A', B', C'. Fie A_1, B_1, C_1 simetricele punctelor A', B', C' faţă de mijloacele laturelor BC, CA, AB, iar H ortocentrul triunghiului ABC. Să se demonstreze că cercurile de diametre HA_1, HB_1, HC_1, mai au un punct comun în afară de H.

G-L GH. BUICLIU

2213. — Cineva întrebat anul acesta ce vârstă are, răspunde : Peste şase ani voiu avea vârsta egală cu suma cifrelor anului naşterei mele.

Se cere această vârstă.

ION DILI SCHILERU

2214. — Să se calculeze derivatele funcţiilor

$$y = \arcsin \frac{x-1}{x} \quad \text{şi} \quad z = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-2}}$$

şi să se explice rezultatul, ştiind că y şi z sunt arce în primul cadran.

MARCEL D COTARIU

2215. — Să se rezolve sistemul,

$$\begin{cases} a\cos(x+y-z) - c\cos(x-y+z) = 2S\dfrac{a-b}{ab} \\ b\cos(-x+y+z) - a\cos(x+y-z) = 2S\dfrac{b-c}{bc} \\ c\cos(x-y+z) - b\cos(-x+y+z) = 2S\dfrac{c-a}{ac} \end{cases}$$

unde a, b, c, S, sunt elementele unui triunghiu dat.

C. C. TINCU

2216. — Dacă

$$B + C = 90^0,$$

atunci avem relaţia

$$\sin B \operatorname{cp} \frac{C}{2} + \sin C \operatorname{cp} \frac{B}{2} = 1.$$

V. ALACI

Revista Matematică din Timișoara apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abramescu N.**, Doctor în matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timișoara.
2. **Adam D. R.**, Sublocotenent de geniu, Strada M. Cogălniceanu 31, București.
3. **Adamescu M.**, Licențiat în Matematici, Inspector Financiar, București.
4. **Alaci V.**, Doctor în Matematici, Profesor la Politehnică, Timișoara.
5. **Almăjan P.** Locotenent, Licențiat în Matematici, Strada Zaharia 23, București.
6. **Ambruș Fr.**, Inginer, Asistent, Polit., Timișoara.
7. **Anastasiade I.**, Inginer, Profesor pensionar, Politehnica, Timișoara.
8. **Andronescu P.**, Doctor-Inginer, Profesor la Electrotehnică la Politehnică, Rectorul Politehnicei din Timișoara.
9. **Angheluță Th.**, Doctor în Matematici Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timișoara.
10. **Ardelean Șt.**, Inginer, Director și Profesor, Liceul Industrial, Timișoara.
11. **Arghiriade Em.**, Doctor în Matematici, Conferențiar de Matematici Generale la Polit., Timișoara.
12. **Baidaff B. I.**, Doctor în Matematci. Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
13. **Băncilă Gh.**, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
14. **Bădescu Radu**, Doctor în Matematici, Profesor la Facultatea de Agronomie, București.
15. **Bakony C.**, Inginer, Profesor de Tehnologie la Politehnica, Timișoara.
16. **Bănărescu M.**, Inginer, Inspector de Control C. F. R., Decan și Profesor la Politehnica Timișoara, Strada Doja 51.
17. **Bărglăzan A.**, Doctor Inginer, Profesor la Mașini Hidraulice, dela Politehnica, Timișoara.
18. **Baron C.**, Șef de lucrări la catedra de Fizică dela Politehnică, Timișoara.
19. **Benes Paul**, Profesor la Liceul Schewitz-Thierrin, București.
20. **Berindean V.**, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
21. **Berzănescu A.**, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
22. **Blașian V.**, Inginer de Mine, Profesor onorar la Politehnică, Timișoara.
23. **Bobârnac M.**, Inginer, Societatea Astra, Brașov.
24. **Bonea I.**, Director de studi și Profesor la Topografie și Geodezie, Politehnică, Timișoara.
25. **Botez M.**, Doctor în Matematici, Conferențiar de Geometrie Descriptivă și Stereotomie la Politehnică din Cernăuți.
26. **Botiș V.**, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
27. **Boșian O.**, Inginer, Asistent Polit., Timișoara.
28. **Buicliu Gh.**, General de Artilerie, Fost 10 ani Profesor de Geometrie Analitică la Școala Politehnică din Timișoara. Însărcinat cu conferința de Balistică Exterioară la Politehnica din București, Strada M. Cogălniceanu 10, București II.
29. **Bumbu V.**, Inginer, Conferențiar Polit., Timișoara.
30. **Călniceanu C.**, Inginer, Conferențiar la Polithnica din Timișoara.
31. **Călugăranu George**, Doctor în Matematici, Profesor de Teoria Funcțiilor la Universitatea din Cluj (Timișoara).
32. **Cândea C.**, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnică din Timișoara.
33. **Catona V.**, Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Politehnică din Timișoara.
34. **Cătuneanu C.**, Inginer, Profesor Polit., Timișoara.
35. **Ciaudian Virgil**, Profesor la Liceul Mihai Viteazul din București.
36. **Coca A.**, Licențiat în Litere, Lector de Limba engleză la Politehnica din Timișoara.
37. **Coman A.**, Profesor Liceul „C. Diaconovici-Loga", Profesor onorific la Politehnică din Timișoara.
38. **Comănescu A.**, Licențiat în Matematici, Profesor la Liceul din T.-Măgurele.
39. **Constantinescu G. G.**, Doctor în Matematici, București.
40. **Constantinescu Gh.**, Profesor la Liceul Lazăr, București.
41. **Contrea A.**, Doctor în Științe Naturale, Asistent pe lângă catedra din Mineralogie și Petrografie dela Politehnica din Timișoara.
42. **Costăchescu V. C.**, Căpitan de Marină, Constanța.
43. **Cristescu I.**, Inginer, Profesor onorar la Politehnică din Timișoara.
44. **Cristodorescu Gh.**, Inginer, Asist. Polit. Timișoara.
45. **Cristodulo N.**, Licențiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Politehnica din Timișoara.
46. **Cserveny I.**, Inginer U. D. R., Reșița.
47. **Curea I.**, Doctor în Matematici. Conferențiar de Matematici Generale și Mecanică la Facultatea de Agronomie, Timișoara.
48. **Demetrescu Gh.**, Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din București.
49. **Diaconescu N.**, Profesor la Liceul din Slatina.
50. **Dimitriu Gh.**, Inginer, Conferențiar Politehnica Timișoara.
52. **Dinculescu C.**, Inginer, Profesor Polit., Timișoara.
52. **Dobrescu F.**, Inginer, Asistentă Polit., Timișoara.
53. **Dobrozemsky M.**, Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Polit., Timișoara.
54. **Dumitriu-Dada**, Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
55. **Erbiceanu C.**, Inginer, Profesor Polit., Timișoara.
56. **Filipescu Miliade**, Doctor, Profesor Politehnica Timișoara.
57. **Florescu M.**, Inginer, Inspector Silvic, Strada A. Orescu 9, București.
58. **Frătici I.**, Inginer Asistent la Politehnica, Timișoara.
59. **Fridlovsky A.**, Asistentă Politehnica Timișoara.
60. **Georgescu D.**, Profesor la Liceul din Pitești.
61. **Gheorghiu Th. Gh.** Doctor în Matematici, Profesor de Geometrie Descriptivă la Politehnica din Timișoara.
62. **Gheorghiu V.**, Inginer, Asistent pe lângă catedra de Hidraulica dela Politehnica, Timișoara.
63. **Ghermănescu M.**, Doctor în Matematici, Profesor la catedra de Mecanică, Politehnica, Timișoara.
64. **Ghițescu Spiridon**, Profesor secundar, București.
65. **Grigore V.**, Inginer, Asistent Politehnica, Timișoara.
66. **Hermann V.**, Licențiat în Matematici, comuna Baia, Județul, Arad.
67. **Hofer O.**, Profesor lic. Diaconovici Loga, Asistent Politehnica Timișoara.

68. **Honae C.**, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
69. **Hristea H.**, Inginer-Inspector General la C. F. R.
70. **Gloden A.**, Doctor în Matematici, Profesor à l'Athénée, Rue Jean Jaurés 11, Luxemburg.
71. **Ghircoiaşiu V. Nicolae**, Asistent la Facultatea de Ştiinţa, Timişoara.
72. **Iasinski N.**, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
73. **Iliescu I.**, Inginer Asistent Politehnica, Timişoara.
74. **Ionescu-Biss P. H.**, Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
75. **Ionescu Bujor C-tin**, Licenţiat în Matematici. Directorul Liceului din Buftea.
76. **Ionescu D. V.**, Doctor în Matematici, Profesor şi Decan la Universitatea din Cluj, provizor în Timişoara.
77. **Ionescu-Ţiu D. C.**, Locotent, Licenţiat în Matematici, Calea Griviţei 158, Bucureşti.
78. **Ionescu S.**, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
79. **Ivănescu Cezar**, Profesor Liceul militar, Târgovişte.
80. **Jivănescu St.**, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
81. **Kielburger M.**, Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotehnică la Politehnica. Timişoara.
82. **Kühn I.**, Doctor în Chimie, Şef de lucrări pe lângă Catedra de Chimie Generală la Politehnica din Timişoara.
83. **Lascu Bal**, Licenţiat în Matematici, preparator la Facultatea de Ştiinţe din Cluj (Timişoara).
84. **Laţiu V.**, Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie la Politehnică din Timişoara.
85. **Leonida D.**, Inginer, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
86. **Linteş I.**, Comandor Doctor Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.
87. **Liteanu Gh.**, General de Artilerie, Bucureşti.
88. **Lupan A.**, Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
89. **Macovschi Eug.**, Doctor în Chimie, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti.
90. **Manughevici C.**, Inginer-Chimist, şef de Lucrări la Politehnica din Timişoara.
91. **Mardan D.**, Inspector General, Profesor la Politehnică din Timişoara.
92. **Mărculescu Origen**, Profesor la Colegiul „Carol I", Craiova.
93. **Mărinescu I.**, Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
94. **Mateescu S.**, Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor onorar, Timişoara.
95. **Mătieş V. I.**, Profesor la liceul din Blaj.
96. **Mercuţă Emilian**, Licenţiat în Matematici, Strada Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.
97. **Milcoveanu D.**, Doctor Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
98. **Mihăileanu N. N.**, Profesor secundar, Bucureşti.
99. **Munteanu E.**, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
100. **Mioc V.**, Licenţiat în Matematici. Directorul Liceului Loga, Asistent pe lângă Catedra de Analiza Matematica la Politehnica din Timişoara.
101. **Murariu P.**, Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Militar „Mihai Viteazu", Timişoara.
102. **Murgulescu Elena**, Licenţiată în Matematici, Asistentă la Politehnica din Timişoara.
103. **Murgulescu G. I.**, Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
104. **Musta Ştefan**, Profesor secundar, Strada Pavel 4, Beiuş.
105. **Nadaşan Şt.**, Doctor-Inginer, Profesor la Catedra de Rezistenţa Materialelor la Politehnica din Timişoara.
106. **Naneş Gh.**, Profesor pensionar, Bucureşti.
107. **Nicolau A.**, Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
108. **Nicolau P.** Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
109. **Ogrin N.**, Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
110. **Oltenschi I.**, Inginer, Profesor Polit., Timişoara.
111. **Onicescu O.**, Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Strada Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
112. **Orăşeanu C.**, Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Politehnica din Bucureşti.
113. **Orăşeanu Gr.**, Profesor secundar, Bucureşti.
114. **Patriciu Valeriu**, Doctor, Profesor la Catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte la Politehnica din Timişoara.
115. **Petrescu A.**, Profesor onorar, Bucureşti.
116. **Poboran I. V.**, Inginer, Profesor Polit., Timişoara.
117. **Pop Em.**, Asistent Politehnica, Timişoara.
118. **Pop V.**, Inginer, Asistent Politehnica, Timişoara.
119. **Popa N.**, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
120. **Popescu E.**, Doctor în Chimie, Profesor la Politehnica, Bucureşti.
121. **Popescu I.**, Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Politehnica din Timişoara.
122. **Popescu N. Corneliu**, Profesor, Călăraşi.
123. **Predoescu I. M.**, Inginer la Societatea „Astra Română", Judeţul, Prahova.
124. **Protopopescu I.**, Inginer-Şef, Profesor, la Politehnica din Timişoara.
125. **Purcariu I.**, Doctor în Fizică, Profesor la Academia Comercială din Bucureşti.
126. **Porumb N.**, Inginer, Conferenţiar Polit., Timişoara.
127. **Purcariu I.**, Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
128. **Racliş N. R.**, Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti.
129. **Răduleţ R.**, Doctor-Inginer, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
130. **Roibănescu C.**, Profesor, Bucureşti.
131. **Sauciuc L.**, Doctor în Chimie, Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.
132. **Safirescu D.**, Magistrat, Conferenţiar Politehnica, Timişoara.
133. **Sălceanu C.**, Doctor în Fizică, Profesor, Politehnica, Timişoara.
134. **Sarmeş I.**, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.
135. **Savin C. Ion**, Licenţiat în Matematici, Strada Sărăriei 56, Iaşi.
136. **Savi Gh.**, Inginer, Asistent Polit. Timişoara.
137. **Schram Edith**, Inginer, Timişoara.
138. **Schileriu I.**, Inginer, Profesor Polit., Timişoara.
139. **Scărlătescu D.** Inginer, Profesor la Liceul Industrial din Timişoara.
140. **Scorpan Al.**, Inginer, depoul C. F. R., Asistent la Politehnica, Timişoara.
141. **Sergescu P.**, Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Politehnica, Bucureşti.
142. **Severineanu C.**, Inginer-Şef, Inspector General C. F. R., Profesor la Politehnica Timişoara.
143. **Silaş Gh.**, Profesor lic. industrial, Asistent Politehnica Timişoara.
144. **Simionescu D. Gh.**, Licenţiat în Matematici, Profesor secundar şi Inspector Şcolar, Bucureşti

145. **Smighelschi O.,** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân-Martin.
146. **Stamatescu I.,** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
147. **Stambuleanu A.,** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Politehnică, Timişoara.
148. **Stamate I. Ionel,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara
149. **Stan A.,** Căpitan de Artilerie, Licenţiat Matematici, Bucureşti.
150. **Stăncescu C.,** Doctor-Inginer, Profesor onorar la Politehnica, Timişoara.
151. **Stantzel E.,** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Politehnica, Timişoara.
152. **Steblea S.,** Inginer, Asistent Politehnica Timişoara.
153. **Stoicescu L.,** Inginer, Profesor de Fizică Industrială La Politehnica din Timişoara.
154. **Stoicescu M.,** Profesor şi Director la Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.
155. **Tarţa Tr.,** Inginer, Asistent Polit., Timişoara.
156 **Teodorescu C.,** Inginer-Şef, Rectorul Politehnicei din Bucureşti.
157. **Teodosiu A.,** Doctor în Matematici, Profesor onorar, Timişoara.
158. **Tică M.,** Inginer, Asistent Politehnica Timişoara.
159. **Ţino O.,** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometrie Analitică la Politehnica Timişoara.
160. **Trifu E.,** Inginer, Conferenţiar Polit., Timişoara.
161. **Vâlcovici V.,** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Strada Londra 44, Bucureşti.
162. **Vêverca I.,** Doctor, Conferenţiar Polit., Timişoara.
163. **Viciu Aurel,** Profesor la Liceul Militar, Timişoara.
164. **Vinţeovschi M.,** Ingner, Asistent Polit., Timişoara.
165. **Vişa Eugen,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Sf. Sava, Bucureşti.
166. **Vlad I. V.,** Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
167. **Vlădescu I.,** Doctor-Inginer, Profesor la Politehnica din Timişoara.
168 **Zăgănescu I.,** Inginer la C. F. R. şi Profesor la Politehnica, Timişoara.
169. **Zaharia N. O.,** Profesor, Constanţa.
170. **Zapan Gr.,** Comandor-Aviator, Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris), Şeful Serviciului Tehnic al Regiunii 3 Aeriene, Strada Pasteur 44, Bucureşti 6.
171. **Zbegan V.,** Inginer, Conferenţiar Polit., Timişoara.
172. **Weber Matei,** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul Banaţia, Timişoara.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bălan Costel, (P.); **Bârzănescu Al.,** (P.); **Bossie V. Boris,** (2115, 2116, 2120, 2129, 2145, 2164, 2207); **Cherdivarencu I.,** (2186, 2196); **Cicerean Gh.,** (2034, 2050, 2194); **Cochela I. Livius,** (2155, 2162, 2164, 2181, 2207); **Constantinescu N. Nicolae,** (2164); **Cotariu D. Marcel,** (2189, 2202, 2207, 2208); **David Vasile,** (1877, 1917, 1951, 1981, 2086, 2168, 2199); **Enache Ion,** (2106, 2171, 2186, 2196); **Filimon Ioan,** (2155, 2157, 2164, 2168, 2181, 2188, 2190, 2207); **Frunză Radu,** (2098, 2115, 2124, 2125, 2148, 2155, 2161, 2164, 2172, 2175, 2180, 2181, 2197, 2198, 2207); **Georgescu Nicolin,** (2156, 2157, 2168, 2170, 2175, 2187, 2189, 2196); **Gloden A.,** (2191, 2192); **Goldiş T. Gh.,** (2155, 2170, 2176, 2187, 2192); **Groza Liviu,** (2116, 2135, 2181); **Grumăzescu Mircea,** (P.); **Logăfătu M. Tanase,** (2115, 2120, 2148, 2162, 2164, 2181); **Ionescu A. Florin,** (2162, 2164, 2207); **Măran I. Ana,** (2115, 2118, 2124, 2135, 2150, 2174, 2182, 2183, 2187, 2191, 2196, 2197, 2198, 2199); **Miclea Nicolae,** (2131, 2155, 2170, 2175, 2178); **Mărmureanu Gh.,** (2207); **Paştea Liviu,** (2198); **Pop Emil,** (2156, 2157, 2164, 2170, 2186, 2187, 2188, 2190, 2196, 2198); **Popescu I. Barbu,** (2123, 2130, 2138, 2154, 2155, 2162, 2163, 2181, 2194); **Rogoz V. Ioan,** (2123, 2130, 2138, 2190, 2194, 2195, 2207); **Sabău Mihai,** (P., 2148, 2149, 2157, 2165, 2168, 2174, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2196, 2198, 2207); **Serengău Mihai,** (2098 2118, 2124, 2148, 2155, 2164, 2172, 2175, 2181, 2198); **Streja Iorgu,** (2196); **Szabo Iuliu,** (P., 2138, 2162, 2170, 2202, 2207,); **Tabacu Marius,** (2190, 2207); **Tincu C-tin,** (P., 1874, 1906, 1907, 2077, 2124, 2175 2198); **Vrâncean G. Gh.,** (2181, 2187, 2190, 2194, 2195, 2196, 2202, 2207); **Wegener Eugen,** (P., 1919, 2002, 2072, 2123, 2129, 2130, 2169, 2183, 2158, 2193, 2194, 2196).

Costul abonamentului la „Revista Matematică din Timişoara", pentru anul XXIV (1 Martie 1944—1 Martie 1945), este de 350. (trei sute cincizeci lei). Un număr 40 lei.

Rugăm pe corespondenţii noştri a ne trimite din timp costul abonamentului pentru a nu intrerupe expedierea pentru anul ce a început la 1 Martie 1944.

ANUL XXIV. APRILIE 1944 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. G. IUGA: O PROBLEMA DE ANALIZA NEDETERMINATA.
2. NOTE MATEMATICE 4, 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 908, 2059, 2145, 2148, 2150, 2155, 2162, 2164.
5. PROBLEME PROPUSE: 2217–2224.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 2. TIMISOARA, APRILIE 1944.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

O PROBLEMĂ DE ANALIZĂ NEDETERMINATĂ.

DE

G. IUGA.

1. *Se cere rezolvarea în numere întregi a ecuației cu patru necunoscute*

(1) $$x^3+y^3+z^3=t\,x\,y\,z.$$

Dacă considerăm cantitatea t ca parametru dat (un număr întreg oarecare), atunci in raport cu celelalte trei necunoscute, ecuația este *omogenă* și *simetrică*. Pentru o soluție anumită a ecuației vom întrebuința, uneori, notația simbolică (x, y, z, t), unde valorile numerice găsite pentru x, y, z vor reprezenta *elementele soluției*, iar numărul întreg t *parametrul ecuației*. De pildă: (1, 2, 3, 6 sau (— 1, 1, 2, — 4).

Este de ajuns să cercetăm soluțiile *simple*, adecă acelea ale căror elemente sunt prime între ele, căci omogenitatea ecuației permite să suprimăm divizorul comun al celor trei elemente. Este ușor de verificat că în cazul nostru soluția simplă este constituită din elemente prime între ele *două câte două*, căci structura ecuației ne arată că orice divizor prim, comun la două elemente, trebue să dividă și pe al treilea.

Dintr'o soluție simplă (a, b, c, t) putem duduce o infinitate de soluții *amplificate* $(m\,a, m\,b, m\,c, t$, atribuind lui m orice valoare numerică întreagă, pozitivă sau negativă. Când $m=-1$, avem tot o soluție simplă, *opusă* celei considerate la început.

Simetria ecuației îngădue să deducem dintr'o soluție cunoscută, încă alte cinci soluții, *asociate* cu cea considerată prin simpla permutare a elementelor între ele.

Ecuația dată se mai poate scrie sub forma

(2) $$(t\,x\,y-z^2)\,z=(x+y)(x^2-x\,y+y^2).$$

Observăm imediat că în cazul când un element, de pildă z, este zero, atunci trebue să avem concomitent sau $x+y=0$, sau $x^2-x\,y+y^2=0$. In felul acesta obținem soluțiile simple $(1, -1, 0, t)$ și $(0, 0, 0, t)$, precum și cele rezultate prin permutarea elementelor. Vedem că aceste soluții *necomplete* sunt valabile pentru orice valoare a parametrului.

Vom numi soluții *complete* pe acelea ale căror elemente sunt toate trei diferite de zero. Pe viitor vom cerceta numai soluțiile *complete* și *simple*.

2. Din ecuația (2) deducem că necunoscuta z se descompune, în general, în doi factori z_1 și z_2, primul din aceștia fiind divizorul numărului $x+y$ și al doilea al lui $x^2-x\,y+y^2$. Putem deci scrie egalitățile

(3) $$z=z_1\,z_2;\ x+y=z_1\,z_3;\ x^2-x\,y+y^2=z_2\,z_4,$$

cu consecința $t\,x\,y-z^2=z_3\,z_4$.

Vom lua întotdeauna pentru z_1 pe cel mai mare divizor comun al numerelor z și $x+y$, astfel că numerele z_2 și z_3 vor fi prime între ele.

Din cauza simetriei putem scrie de asemenea

(4) $$\begin{cases} x=x_1\,x_2;\quad y+z=x_1\,x_3; \\ y^2-y\,z+z^2=x_2\,x_4;\quad t\,y\,z-x^2=x_3\,x_4 \\ y=y_1\,y_2;\quad z+x=y_1\,y_3; \\ z^2-z\,x+x^2=y_2\,y_4;\quad t\,z\,x-y^2=y_3\,y_4, \end{cases}$$

unde de asemenea x_1 (resp. y_1) este cel mai mare divizor comun al numerelor x și $y+z$ (resp. y și $z+x$).

Ținând seama de identitatea cunoscută

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),$$

ecuația (1) se mai poate transforma în echivalenta sa

(5) $$\begin{cases} (t-3)\,x\,y\,z=\mathrm{S\,T}, \text{ unde} \\ \mathrm{S}=x+y+z \text{ și } \mathrm{T}=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy. \end{cases}$$

Din (3) și (4) urmează că S este divizibil cu

$x_1 y_1 z_1$, iar T cu $x_2 y_2 z_2$, căci pentru o soluție simplă și completă pe de o parte x_1, y_1, z_1, pe de altă parte x_2, y_2, z_2 sunt numere prime între ele două câte două. Descompunând și pe $t-3$ în doi factori convenabil determinați, anume $t-3=t_1 t_2$, putem scrie

(6) $\quad S=t_1 x_1 y_1 z_1 \quad$ și $\quad T=t_2 x_2 y_2 z_2.$

Pentru valoarea specială $t=3$ urmează că sau $t_1=0$, sau $t_2=0$, deci sau $x+y+z=0$ sau $T=0$.

Cum însă T este o formă ternară de gradul al doilea esențial pozitivă, care se poate pune sub forma

$$T=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2],$$

pentru $T=0$ rezultă singura soluție admisibilă $x=y=z$. Avem deci pentru $t=3$ soluția *generală* $(x, y, -x-y, 3)$, cu două variabile independente, și soluția *singulară* simplă $(1, 1, 1, 3)$.

3. Din egalitățile (3) deducem relațiile

$$3xy=z_1^2 z_3^2-z_2 z_4$$

$$txy=z_1^2 z_2^2+z_3 z_4,$$

iar prin eliminarea numărului z_4 între aceste două ultime egalități obținem

$$(tz_2+3z_3)xy=z_1^2(z_2^3+z_3^3).$$

Cum însă z_1 este prim cu xy, urmează că z_1^2 divide parenteza din stânga, deci putem scrie

(7) $\quad tz_2+3z_3=vz_1^2 \quad$ și $\quad (z_2+z_3)(z_2^2-z_2 z_3+z_3^2)=vxy$

unde v reprezintă cel mai mare divizor comun al membrilor din stânga și este diferit de zero, dacă $t\neq 3$.

Inmulțind ambii membri ai primei egalități din (7) cu z_1 și ținând seama de (3), obținem

$$3x+3y+tz=vz_1^3.$$

Din simetria ecuației (1) și a relațiilor (3) și (4) rezultă alte două egalități similare, împreună cu cea precedentă alcătuesc sistemul de ecuații lineare în x, y, z

$$(7_a) \quad \begin{cases} tx+3y+3z=\lambda x_1^3 \\ 3x+ty+3z=\mu y_1^3 \\ 3x+3y+tz=\nu z_1^3. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem fiind $(t-3)^2(t+6)$, urmează că, pentru valorile 3 și -6 ale parametrului t, vom avea nedeterminare, sau inconpatibilitate. Din adunarea acestor trei ecuații, rezultă relația

(8) $\quad \lambda x_1^3+\mu_1 y_1^3+\nu z_1^3=(t+6)t_1 x_1 y_1 z_1.$

Având în vedere că $S=x+y+z=z_1(z_3+z_2)=t_1 x_1 y_1 z_1$ și deci $z_2+z_3=t_1 x_1 y_1$, egalitatea a doua din (7) se poate scrie, după simplificarea cu $x_1 y_1$, sub forma mai redusă

$$t_1(z_2^2-z_2 z_3+z_3^2)=\nu x_2 y_2.$$

Din cauza simetriei, mai avem însă și relația $x_2+x_3=t_1 y_1 z_1$, din care deducem că t_1 este prim cu x_2, căci un divizor comun al lor ar trebui să dividă și pe x_3, ceeace nu este admisibil, întrucât x_2 și x_3 sunt prime între ele. Pentru aceleași motive t_1 este prim și cu y_2, prin urmare t_1 trebue să dividă pe ν, adecă $\nu=t_1 n$ și deci

(9) $\quad z_2^2-z_2 z_3+z_3^2=n_1 x_2 y_2.$

La fel vom putea stabili că λ și μ sunt divizibili cu t_1, adecă $\lambda=t_1 l$ și $\mu=t_1 m$ In consecință (8) se va transforma în

(10) $\quad l x_1^3+m y_1^3+n z_1^3=(t+6)x_1 y_1 z_1.$

Introducând în (9) în locul numerelor x_2, y_2, z_2, z_3 echivalentele lor exprimate, în baza relațiilor stabilite mai sus, în funcție de $x_1, y_1, z_1, l, m, n, t$ și ținând seama de (10), obținem după calcule și reduceri ce nu le mai reproducem aici, remarcabila relație ce trebue să subsiste între coeficienții numerici l, m, n și parametrul t, anume

(11) $\quad lmn=t^2+3t+q.$

Constatăm că fiecare soluție numerică a ecuației (1), conduce la o soluție determinată a ecuației *asociate* (10), care este ceva mai complexă, dar de o structură întrucâtva similară, coeficienții acestei de a doua ecuații stând în strânsă legătură cu parametrul primei ecuații.

Exemple numerice.

Soluția $(1, 1, -1, -1)$ are ca ecuație asociată $x_1^3+y_1^3+7z_1^3=5x_1 y_1 z_1$ cu soluția corespunzătoare $\{1, 1, -1\}$.

Soluția $(1, 2, 3, 6)$ are ca ecuație asociată $21x_1^3+3y_1^3+z_1^3=12x_1 y_1 z_1$ cu soluția corespunzătoare $\{1, 2, 3\}$.

Soluția (19, — 52, 21, 6) are aceiaș ecuație asociată, însă cu soluția corespunzătoare {1, — 4, 3}.

Soluția (5275), 1817, 3258, 6) are ca ecuație asociată $3x_1^3 + 3y_1^3 + 7z_1^3 = 12x_1y_1z_1$ cu soluția corespunzătoare {25, 23, 18}.

Observăm că pentru o anumită valoare a parametrului t, diverse soluții ale ecuației (1) pot conduce la diverse ecuații asociate, numărul acestora fiind, bine înțeles, limitat din cauza relației restrictive (11).

Reciproc, să dovedim că orice soluție simplă și completă (cu elemente prime între ele două câte două) a ecuației (10), supusă condiției (11) conduce la o soluție a ecuației (1).

Formăm, în acest scop, cu elementele date x_1, y_1, z_1, l, m, n numerele întregi definite prin următoarele șase egalități

$$(12)\quad \begin{cases} t_2 x_2 = l x_1^2 - 3 y_1 z_1 \\ t_2 y_2 = m y_1^2 - 3 z_1 x_1 \\ t_2 z_2 = n z_1^2 - 3 x_1 y_1 \end{cases} \qquad (13)\quad \begin{cases} t_2 x = l x_1^3 - 3\pi \\ t_2 y = m y_1^3 - 3\pi \\ t_2 z = n z_1^3 - 3\pi, \end{cases}$$

unde pentru prescurtare, s'a scris π în locul produsului $x_1 y_1 z_1$ și unde am notat cu t_2 pe cel mai mare divizor comnn al expresiilor din dreapta egalităților (12). Afirmăm că sistemul de numere x, y, z, obținute în chipul acesta, dă o soluție pentru ecuația (1). Pentru demonstrare este de ajuns să verificăm că sunt satisfăcute condițiile (6).

Adunând, membru cu membru, cele trei egalități (13) și ținând seama de ecuația (10), obținem în primul rând

$$t_2 (x + y + z) = (t - 3)\pi,$$

ceeace concordă cu prima condiție (6), dacă notăm cu t_1 câtul dintre $t - 3$ și t_2. Rămâne de arătat că t_2 divide pe $t - 3$. In vederea acestei demonstrări să cercetăm în ce condițiuni t_2 poate fi *neprim* cu π. Presupunând că unul din factorii lui π, de pildă x_1, are cu t_2 divizor comun pe d, prima egalitate (12) impune singura valoare admisibilă $d = 3$, întrucât produsul $y_1 z_1$ este prim cu x_1. Aceeași egalitate ne arată că, în acest caz, t_2 nu poate cuprinde decât un *singur* factor de 3. Celelalte două egalități (12) ne arată apoi că, în aceste condițiuni, m și n trebue să fie multipli de 3, prin urmare expresia $t^2 + 3t + 9$ și deci, concomitent, numerele t și $t - 3$ sunt divizibile cu 3. Ipoteza, că un alt factor al lui π (y_1 sau z_1) n'ar fi prim cu t_2, duce la acelaș rezultat. Rămâne stabilit că π și t_2 nu pot avea divizor comun decât pe 3, t_2 conținând pe acest factor prim numai la puterea întâia. Dar în acest caz, $t - 3$ încă conține acest factor prim și deci, potrivit ultimei egalități, se divide cu t_2.

In cazul când t_2 cuprinde mai mulți factori de 3 (soluții de categoria a doua în x, y, z), egalitățile (12) ne arată că nici unul din elementele x_1, y_1, z_1 nu admite divizorul 3 și că, prin urmare, t_2 este prim cu π și divide numărul $t - 3$.

Pentru a verifica satisfacerea condiției a doua dela (6), găsim prin calcul, ținând seama și de relația (10)

$$t_2^2 (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = l^2 x_1^6 + m^2 y_1^6 + n^2 z_1^6 - mn y_1^3 z_1^3 - nl z_1^3 x_1^3 - lm x_1^3 y_1^3,$$

$$t_2^3 x_2 y_2 z_2 = (t^2 + 12t + 36)\pi^2 - 3(mn y_1^3 z_1^3 + nl z_1^3 x_1^3 + lm x_1^3 y_1^3).$$

Potrivit relației (6), membrii din stânga trebue să aibă aceeași valoare, prin urmare, egalând membrii din dreapta, rezultă egalitatea

$$l^2 x_1^6 + m^2 y_1^6 + n^2 z_1^6 + 2(mn y_1^3 z_1^3 + nl z_1^3 x_1^3 + lm x_1^3 y_1^3) = (t + 6)^2 \pi^2,$$

care este satisfăcută, deoarece reprezintă ecuația (10) înmulțită cu ea însăși, membru cu membru.

Condiția a doua fiind de asemenea împlinită, reciprocitatea este dovedită.

4. Nu se cunoaște o metodă de calcul sau o formulă cu caracter general pentru rezolvarea ecuației (1). Cu atât mai dificilă se prezintă problema rezolvării directe a ecuațiilor asociate. Trebue să ne mulțumim, în stadiul în care se găsesc azi cercetările în această privință, cu determinarea unor soluții particulare ale ecuației (1) pentru anumite valori ale parametrului, date dinainte sau cele mai adeseori deduse din metodele întrebuințate, iar pe urmă este lesne să stabilim pentru oricare soluție numerică, obținută în acest chip, soluția sa asociată.

In Gazeta Matematică (anul XLVI — 1941 — paginile 489, 590 și 653 s'au publicat sub formă rezumativă rezultatele obținute de domnii *Gh. Constantinescu* și *I. B. Florescu* în privința rezolvării

ecuației (1), căci chestiunea referitoare la ecuația asociată se pune pentru întâia oară în lucrarea de față.

D-l *Gh. Constantinescu* găsește, în primul rând, în ipoteza $z = -1$, probabil pe cale empirică, șirul de soluții

$$(k, k^2+k+1, -1, -k^3-2k^2-3k-3),$$

unde k poate primi toate valorile întregi, pozitive și negative, iar parametrul t nu este arbitrar, ci anumită funcție de k. In al doilea rând, d-sa indică o cale prin care se pot obține soluțiuni particulare în ipoteza $z = 1$, publicând și câteva rezultate numerice.

Tot d-l *Constantinescu* arată că din soluția cunoscută (a, b, c, t) se poate întotdeauna deduce pentru aceiaș valoare a lui t o soluție nouă $(a\{b^3-c^3\}, b\{c^3-a^3\}, c\{a^3-b^3\}, t)$ și că din două soluții distincte, adecă neasociate prin permutarea elementelor, (a, b, c, t) și (x_1, y_1, z, t), se obține noua soluție $(a^2yz-bcx^2, b^4zx-cay^2, c^2zy-abz^2, t)$.

D-l *I. B. Florescu* stabilește, în ipoteza $x+y=kz$, următoarele șiruri de soluții

$$(-1, k^3+1, k^2, -k^4-3k)$$

$$(-1, k^2-k+1, k-1, -k^3+k^2-2k-1)$$

$$(-k-1, k^2-k+1, k-2, -k^2+k-4).$$

Pe alte căi mai obține d-l *Florescu* șirurile de soluții

$$(1, -1, k, -k^2),$$

$$(k^7+3k, k^6-4k^3-1, -k^6-4k^3+1, -k^2),$$

precum și soluții numerice particulare, întrebuințând o metodă specială a lui *Fermat*.

La aceste rezultate publicate în Gazeta Matematică, adăogăm din partea noastră următoarele șiruri

a) $(k^3-1, k^3+1, -2k, -k^2)$, dedus din ipoteza specială $x+y=-k^2z$.

Pentru valorile impare ale lui k, aceste soluții nu sunt simple, ci amplificate cu 2.

b) $(x, -x-1, 3x^2+3x+1, -9x^2-9x-6)$, dedus din ipoteza $x+y=-1$.

c) $(x, x^2+3x+3, -x-3, -x^2-3x-6)$, dedus din ipoteza $x+z=-3$.

Acest ultim șir nu este esențial diferit de șirul al treilea, indicat mai sus, al d-lui *Florescu*, căci unul se transformă în celălalt prin substituția $x=-k-1$.

5. **Teorema I.** *Fiind date numerele întregi x și y, diferite de zero și prime între ele, expresiile $x+y$ și x^2-xy+y^2 reprezintă două numere întregi prime între ele, cu excepția cazului când una din expresii admite divizorul 3, căci atunci și cealaltă expresie îl admite simultan.*

Această aserțiune se demonstrează imediat, ținând seama de identitatea $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$.

Observăm totodată că expresia x^2-xy+y^2 reprezintă, în condițiunile enunțului, întotdeauna un număr *impar* și *pozitiv*, care chiar când admite divizorul 3, nu admite divizorul 3^2.

Mai observăm că, dacă în ecuația (2) elementul z cuprinde un singur factor 3, atunci t încă trebue să fie divizibil cu 3, căci în baza teoremei, membrul din dreapta al ecuației (2) trebue să conțină cel puțin doi factori de 3.

Simetria ecuației (1) ne scutește de o cercetare separată a cazului când alt element (x sau y) ar fi multiplu de 3.

Teorema II. *Fiind date numerele întregi x, y, z, diferite de zero și prime între ele două câte două, expresiile* S *și* T, *definite sub (5), admit numai în mod simultan divizorul 3.*

Pentru demonstrare este de ajuns să scriem T sub forma

$$(14) \qquad T=(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy).$$

Observăm totodată că S și T, în condițiunile fixate de noi numerelor x, y, z, sunt întotdeauna de paritate diferită și am văzut § 2, că T este un număr *pozitiv*.

Ținând seama de împrejurarea că mai avem și

$$T=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2,$$

urmează că în cazul când T este par (toate trei elementele impare), el este divizibil cu 4.

Mai observăm că, în condițiile noastre, expresia $yz+zx+xy$ este totdeauna *impară*.

6. Vom împărți soluțiile ecuației (1) în trei categorii. In prima categorie vom grupa soluțiile cari au un element, de pildă z, multiplu de 3, anume soluțiile de tipul

$$x=3a+1$$

$$y=3b-1$$

$$z=3c,$$

precum şi cele provenite din acestea prin permutarea elementelor, sau cele opuse acestora. S'a ţinut seamă de cele stabilite anterior, cumcă oridecâteori unul din elemente este divizibil cu 3, suma celorlalte două elemente încă trebue să fie divizibilă cu acelaş număr. Specificăm că în cazul când z este multiplu de 3, ambii factori din membrul al doilea al ecuaţiei (2) sunt divizibili cu 3, cum însă $x^2 - xy + y^2$ admite numai un singur factor 3, acesta va divide sau pe z_2, sau pe z_4. Relaţia găsită mai sus, $txy - z^2 = z_3 z_4$, lămureşte pe deplin această chestiune de alternativă. In adevăr, dacă t nu este multiplu de 3, atunci nici produsul $z_3 z_4$ nu este divizibil şi rămâne în mod necesar ca în acest caz z_2 să fie divizibil cu 3.

Când t admite un singur divizor 3, atunci trebue ca numai unul din cei doi factori, z_3 şi z_4, să-l admită. Dacă l ar admite z_3, ar urma ca şi z_2 să-l admită, ceeace este imposibil, deoarece am stabilit că z_2 şi z_3 sunt numere prime între ele. Aşadară în mod necesar z_4 va fi, în această ipoteză divizibil cu 3, iar nu z_3. Mai rămâne de cercetat ipoteza a treia, când t admite cel puţin *doi* factori de 3.

Atunci în mod necesar z_3 va fi multiplul lui 3, şi cum z_2 este prim cu z_3, şi z_4 trebue să admită un factor de 3.

In rezumat, z_2 admite divizorul 3 numai în cazul când t nu-l admite.

Am mai observat şi în alt loc, că în cazul când t nu este multiplu de 3, elementul, presupus divizibil, trebue să admită cel puţin doi factori de 3.

Pentru soluţiile din prima categorie obţinem

$$S = 3(a + b + c) \text{ şi}$$

$$T = 3[3(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab + a - b) + 1],$$

ceeace însemnează că T admite în acest caz un singur factor 3.

In categoria *a doua* punem soluţiile pentru cari toate trei elementele dau acelaş rest faţă de divizorul 3, anume

$$x = 3a + 1$$

$$x = 3b + 1$$

$$z = 3c + 1.$$

Este suficient să cercetăm cazul când restul este $+1$, deoarece soluţia opusă ar da restul -1 pentru toate trei elementele. Deastădată obţinem

$$S = 3(a + b + c + 1) \text{ şi}$$

$$T = 9(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab),$$

ceeace înseamnă că $t - 3$ trebue să fie multiplu de 27, devremece în membrul din stânga al ecuaţiei (5) numai $t - 3$ poate fi, în ipoteza actuală, divizibil cu 3. Prin urmare, *soluţii de categoria a doua vom putea găsi numai pentru un şir special de valori ale parametrului t, cari verifică congruenţa*

$$t \equiv 3 \pmod{27}.$$

(Va urma).

NOTE MATEMATICE

4. — *Théorème.*

Si les nombres a_i, b_j vérefient les trois relations

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 \\ a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 = b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + b_4^4, \end{cases}$$

on aura aussi, en désignant par S_1 la somme des a_i ou des b_j,

$$S_1[(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3) - (b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + b_4^3)] = 3(a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4).$$

Démonstration. Considérons les a_i resp. les b_j comme racines de deux équations algébiques

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0$$

et

$$x^4 + B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4 = 0.$$

En désignant par S_p la somme $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de la 1re équation et par T_p la somme correspondante pour la 2me, nous aurons, en appliquant les relations bien connues entre les coefficients et les racines,

$$S_3 - T_3 + 3(A_3 - B_3) = 0,$$

$$A_1(S_3 - T_3) + (A_3 - B_3)S_1 + 4(A_4 - B_4) = 0,$$

d'où on tire faciliment la relation à démontrer, puisque $A_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$ et $B_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$.

Exemple en nombres entiers.

$$\begin{cases} 3 + 5 + 13 + 14 = 2 + 7 + 11 + 15 \; (= 35) \\ 3^2 + 5^2 + 13^2 + 14^2 = 2^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 \; (= 399) \\ 3^4 + 5^4 + 13^4 + 14^4 = 2^4 + 7^4 + 11^4 + 15^4 \; (= 67.683) \end{cases}$$

$$35\,[(3^3+5^3+13^3+14^3)-(2^3+7^3+11^3+15^3)]=$$
$$3\,(3.5.13.14-2.7.11.15),$$

ou

$$3^3+5^3+13^3+14^3-(2^3+7^3+11^3+15^3)=$$
$$36=3^3+2^3+1^3.$$

On en déduit

$$5^3+13^3+14^3=1^3+2^3+2^3+7^3+11^3+15^3 (=5066).$$

A. GLODEN.

---

5. — *Remarques sur les carrés parfaits.* Soient $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9$, des nombres entiers de la forme

$$N_i = A.10+i, \quad (i=1,2,3,4,5,6,7,8,9).$$

On a

$$M_1=\frac{1}{2}(N_1^2+N_9^2)=A.(A+1).10^2+41$$

$$M_2=\frac{1}{2}(N_2^2+N_8^2)=A.(A+1).10^2+34$$

$$M_3=\frac{1}{2}(N_3^2+N_7^2)=A.(A+1).10^2+29$$

$$M_4=\frac{1}{2}(N_4^2+N_6^2)=A.(A+1).10^2+26$$

$$M_5=(A.10+5)^2=A.(A+1).10^2+25.$$

Connaissant A, ces relations permettent de déterminer rapidement, (souvent mentalement), des nombres de chacune des formes (1). Ainsi, on a immédiatement

$$M_2=\frac{1}{2}(32^2+38^2)=1234, \quad (\text{car } A=3),$$

$$M_3=\frac{1}{2}(73^2+77^2)=5629, \quad (\text{car } A=7),$$

$$M_5=85^2=8.9.10^2+25=7225, \quad (\text{car } A=8),$$

$$M_5=1975^2=197.198.10^2+25=3900625, (\text{car } A=197).$$

Inversement, les relations conduisent aux solutions en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{2}(\overline{Ay}^2+\overline{Az}^2)=1234, \ldots,$$

où, par hypotèse, les chiffres y et z des unités des nombres $\overline{Ay}$ et $\overline{Az}$ sont tels que $y+z=10$. Il suffit, en effet, d'observer que $12=3.4$ et que $34=\frac{1}{2}(2^2+8^2)$, pour avoir $A=3, y=2, z=8$, et

$$\frac{1}{2}(32^2+38^2)=1234.$$

Enfin, étant donné un carré parfait terminé par 5, on peut facilement obtenir sa racine sans effectuer l'opération habituelle. Ainsi, soit le carré

$$N=861716025.$$

Puisque $8617160=2^3.5.367.587=2935.2936$,
$A=2935$ et $N=861716025\equiv 29355^2$.

V THÉBAULT

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, Nr. 7, Martie 1944. Un an de la moartea lui *A. Gh. Ioachimescu*, de *Al Stoenescu*. Formule pentru calculul suprafețelor laterale ale solidelor rezultate prin tăierea unui con circular drept cu un plan, de Ing. *O. S. Ianculescu*. Patrate isofinale, de *I. V. Mătieș*. Asupra unei metode pentru calculul unghiurilor lui *Euler*, de *N. I. Donciu*. O metodă pentru scrierea ecuației tangentelor dintr'un punct exterior la cerc și sferă. Consecințe pentru conice, de *Gh. D. Simionescu*. Concursul „*Gazetei Matematice*". Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică, de G-l *Gh. Buicliu*. Ing *I I. Chițulescu*, Ing. *I, Ionescu*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Buletinul Politehnicei din București*, Anul XIV, 1943, Fasc. 1—2. Théorème pour les nombres de *Fermat*, par *N. Racliș*. Une propriéte des équations irréductibles de la division du cercle, par *G. Konstandi*. Sur la forme, que prend un fil d'égale resistance animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, par *G. Sikorski*. Théorie des tourbillons dans une fluide visqueux, par *I. Cârstoiu*. Sur les miroirs paraboliques, par *B. Bianu*. Sur les dépôts cathodiques simultanés de cuivre et d'étain, par *I. A. Atanasiu* et *S. Tache*. Considerations géologiques sur l'exploitation du pétrole remanent en roumanie, par *D, Ilie*, contribution, au calcul des réactances inductives des circuits complexes utilisés en traction électrique, en système monophasé, par la méthode du flux traversant effectivement la section du circuit, par *N. Ionescu-Zane*. Le problème de la pénétration des projéctiles dans un obstacole et de la performation des blindages, par *Ion Linteș*. La correzione del peso specifico del leg no impiegato nelle construzioni aeronautiche, par *G. Livada*. Textur des Muttergesteins und Bodenentwicklung in der Zone des sekundären Podols, von *N. C. Cernescu*. Les fondations princières des Curtea de Arges, par *Gr. Ionesco*.

3. *Știință și progres*, Anul IX, Nrile 3—4, 1944.

† Profesorul *Ion Simionescu*. Aplicații ale ecuațiilor lineare, de *D. Pompeiu*. Reformatorul botanicei: *Carol Linné*, de *Alex. Borza*. Mineralogia în cadrul științelor naturale și concepțiile de viață, de *Victor Stanciu* Despre convergența uniformă a seriilor alternate, de *Caius Iacob*. Terminologia științifică, de *C-tin Menciu*. De ce strălucesc stelele (urmare și sfârșit), de *Mircea Drăganu*. Note și însemnări, de *C. Manciu, P. Murariu, Dr. F. P. Daniel Popescu, A. A. V.*, Publicații noui, probleme rezolvate și propuse. † Profesorul *Mihai Botez*, de (T. C.).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 908. — *Din vârfurile patrulaterului* ABCD *se duc segmentele* AA′, BB′, CC′, DD′ *paralele și egale respectiv cu* BC, CD, DA, AB *Se mai duc din aceleași vârfuri segmentele* AA″, BB″, CC″, DD″ *paralele și egale respectiv cu* CD, DA, AB, BC. *Să se arate că dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele* ABCD, A′B′C′D′, A″B″C″D″ *sunt concurente.*

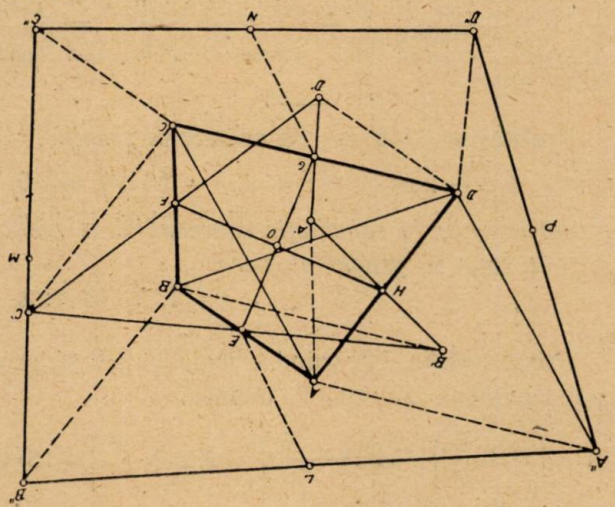
I. MARGINEANU

Soluție. Problema nu este adevărată ori care ar fi senzurile segmentele AA′, BB′,... AA″, BB″... și de aceia concluzia trebue modificată astfel: Dacă A′, B′, C′, D′, A″, B″, C″, D″ *sunt convenabil alese, atunci dreptele care unesc mijloacele celor trei patrulatere sunt concurente.*

In figura următoare se vede că AA′ DB′ este paralelogram, căci

$$B'D = \parallel BC = \parallel AA'.$$

Deci mijlocul H al lui AD coincide cu mijlocul lui A′B′.



La fel figura ABCA′ fiind paralelogram, prin construcție

$$CA' = \parallel AB = \parallel DD',$$

deci mijlocul G al lui DC coincide cu mijlocul lui A′D′.

Se demonstrează analog că D′C′ cu BC și B′C′ cu AB se taie în mijloacele lor E și F.

Prin urmare dreptele care unesc mijloacele laturilor patrupunctelor ABCD, A′B′C′D′ se confundă și se întâlnesc în O.

Pe aceiași figură, ADBB″ este paralelogram căci AD $\parallel =$ BB″.

Deci mijlocul lui DB″ este chiar E. Fie L mijlocul lui A″B″. In triunghiul DB″A″ dreapta LE unește mijloacele a două laturi deci

$$LE = \parallel \frac{A''D}{2}.$$

Dar A″D $\parallel =$ AC căci AA″DC e paralelogram prin construcție. Rezultă

$$LE = \parallel \frac{AC}{2}.$$

La fel se arată că

$$GN = \parallel \frac{AC}{2}$$

și deci figura LENG este paralelogram, ale cărui diagonale se taie în mijlocul lui EG. Dar se știe că în patrulaterul ABCD dreptele HF, EG se taie în mijlocul lor O, care este și mijlocul dreptei care unește mijloacele diagonalelor AC, BD. Putem dar complecta enunțul spunând că dreptele din enunț trec prin mijlocul dreptei care unește mijloacele diagonalelor patrulaterului dat.

Au trimis soluții analoage, la data propunerii problemei D-nii: *Lascu I., Mihăileanu N. N., Rusu D. C.* și *Vasu V.*

G-l Gh. B.

Problema 2059. — *Să se determine* λ, *așa fel ca ecuația*

$$x^3 - x^2 + \lambda = 0$$

să aibă toate rădăcinile reale și raționale.

M. GHERMANESCU

Soluție. Ecuația dată, fiind de grad fără soț, admite sigur o rădăcină reală u, deci

$$\lambda = u^2 - u^3 = u^2(1 - u),$$

în care impunem lui u condiția de a fi rațional.

Impărțind ecuația dată prin $x - u$, rămâne ecuația

$$x^2 + (u - 1)x + u^2 - u = 0,$$

care are rădăcinile raționale și reale dacă

$$(u - 1)^2 - 4(u^2 - u) = v^2,$$

unde v este un număr raţional şi real. Fie $u=\frac{a}{b}$, în care a şi b sunt întregi primi între ei; ultima relaţie devine

$$(b-a)(3a+b)=b^2v^2, \qquad bv=\text{întreg.}$$

Numerele a şi b fiind prime între ele, numerele $b-a$ şi $3a+b$ sunt de asemeni prime între ele, sau au cel mult un divizor al lui 4 ca divizor comuni, produsul lor fiind un patrat perfect, $(bv)^2$, trebue să avem

$$b-a=\alpha\beta^2, \quad 3a+b=\alpha\gamma^2, \quad bv=\alpha\beta\gamma,$$

unde α este un divizor al lui 4. Deducem

$$4a=\alpha(\gamma^2-\beta^2), \quad 4b=\alpha(\gamma^2+3\beta^2)$$

deci

$$x_1=u=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2+3\beta^2}, \qquad \lambda=\frac{4\beta^2(\gamma^2-\beta^2)^2}{(\gamma^2+3\beta^2)^3},$$

$$x_{2,3}=\frac{2\beta(\beta\pm\gamma)}{\gamma^2+3\beta^2},$$

în care β şi γ sunt întregi arbitrari.

Notă. 1°. Ne vine greu s'o mărturisim, aci, dar nici unul dintre corespondenţi, afară de D-l *J. Mahrenholz*, nu a înţeles enunţul problemei. Toţi au studiat ecuaţia dată cu ajutorul teoremei lui *Rolle*, găsind că rădăcinile sunt raţionale când una este dublă.

D-l *J. Mahrenholz* a dat pentru λ şi rădăcini expresiile de mai sus, în funcţie de doi întregi arbitrari.

2°. S'au ocupat de această problemă D-nii: *I. Anton, V. Barbu, N. Georgescu, L. Grozescu, C. Iosifescu, I. Kinsky, A. Muţiu, M. Sabău, A. Stretea* şi *A. Ţigănoiu.*

M. G.

Problema 2145. — *Să se arate că într'un triunghiu* ABC, *raportul*

$$\frac{r_a^2 r_b^2 r_c^2}{a\,b\,c\,h_a\,h_b\,h_c\prod\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}$$

este constant. notaţiile fiind cele obicinuite.

EUGEN I. SIPOS

Soluţie. In virtutea relaţiilor cunoscute

$$r_a=\frac{s}{p-a}, \quad a\,h_a=2s, \quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

şi a celorlalte analoage, expresia dată se poate scri succesiv,

$$\frac{r_a^2 r_b^2 r_c^2}{a\,b\,c\,h_a\,h_b\,h_c\prod\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}=$$

$$\frac{s^6}{8s^3(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}}}=$$

$$\frac{s^3}{8p(p-a)(p-b)(p-c)\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=$$

$$\frac{s^3}{8s^3}=\frac{1}{8},$$

fiindcă

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Expresia dată este astfel constantă.

Soluţii analoage date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Enache Ion* (Slt.), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Goldiş T. Gheorghe* (Lic., Beiuş), *Iacob St. Eugen* (Cpt.), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Ionescu C. Victor*, *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Maliţa A. Mircea* (Lic., Beiuş), *Marinescu N.*, *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pupezescu Gh. Ion*, *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Stretea I. Alexandru* (Polit., Timişoara), *Tica P. Marin-Gall* (Cpt.), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tudor I. Aurel* (Lic., Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Pollt., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2148. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^6-4x^5-2x^4+16x^3-4x^2-16x+8=0,$$

ştiind că printr'o substituţie convenabilă se reduce la o ecuaţie de gradul al 3-lea.

I. V. MATIES

Prima soluţie. Impărţind ecuaţia cu x^3 şi grupând termenii convenabil, obţinem

$$(1) \quad \left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)-4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{2}{x}\right)+16=0.$$

Facem substituţia

$$(2) \quad x+\frac{2}{x}=y$$

şi ridicând la patrat şi la cub, avem

$$x^2+\frac{4}{x^2}=y^2-4, \quad x^3+\frac{8}{x^3}=$$

$$y^3-3x\cdot\frac{2}{x}\left(x+\frac{2}{x}\right)=y^3-6y.$$

Inlocuim în (1) aceste valori, găsim ecuaţia de gradul al 3-lea

$$y^3 - 4y^2 - 8y + 32 = 0,$$

sau

$$y(y^2 - 8) - 4(y^2 - 8) = 0,$$

care se mai peate scri

$$(y^2 - 8)(y - 4) = 0.$$

De aci rezultă,

$$y_1 = 2\sqrt{2}, \quad y_2 = -2\sqrt{2}, \quad y_3 = 4.$$

Inlocuind aceste valori în relaţia de substituţie (2) şi aducând la formă întreagă, găsim respectiv ecuaţiile

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0, \quad x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Rădăcinele acestor ecuaţii, care sunt de fapt rădăcinele ecuaţiei date sunt respectiv

$$x_{1,2} = \sqrt{2}, \quad x_{3,4} = -\sqrt{2}, \quad x_{5,6} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Cum vedem, $\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{2}$ sunt rădăcini duble.

Soluţii analoage date de D-ra *Măran I. Ana* (Polit., Timişoara), şi de d-nii: *Cherdivarescu I.* (Polit., Timişoara), *Ionescu C. Victor*, *Munteanu Gh. Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Rădulescu V. Nicolae* (Călăraşi), *Tincu C. C-tin* (Polit., Timişoara) şi *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara).

Soluţia 2-a. Ecuaţia dată se poate rezolva direct, fără a fi nevoie de vre-o substituţie, punând-o întâi sub forma

$$x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 8 - 4x(x^4 - 4x^2 + 4) = 0.$$

Mai putem scri încă

$$x^6 + 8 - 2x^2(x^2 + 2) - 4x(x^2 - 2)^2 = 0,$$

sau

$$(x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4 - 2x^2) - 4x(x^2 - 2)^2 =$$

$$(x^2 + 2)(x^2 - 2)^2 - 4x(x^2 - 2)^2 = 0.$$

Această ecuaţie se mai poate scri

$$(x^2 - 2)^2(x^2 - 4x + 2) = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt

$$x_{1,2} = \sqrt{2}, \quad x_{3,4} = -\sqrt{2}, \quad x_{5,6} = 2 \pm \sqrt{2},$$

Soluţii analoage date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara) şi *Malita A. Mircea* (Lic., Beiuş).

Problema 2150. — *Să se calculeze suma:*

$$S = C_{k+1}^k + 2C_{k+2}^k + 3C_{k+3}^k + \cdots + (n-k)C_n^k$$

unde simbolul C_m^k *reprezintă numărul combinărilor de* m *obiecte luate câte* k.

EUGEN VISA

Soluţii date de autor:

Prima soluţe. Dispunem termenii sumei de calculat sub forma unui tablou triunghiurilor, precum se vede mai jos:

$$C_{k+1}^k$$

$$C_{k+2}^k + C_{k+2}^k$$

$$C_{k+3}^k + C_{k+3}^k + C_{k+3}^k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^k + C_{n-1}^k + \cdots + C_{n-1}^k$$

$$C_n^k + C_n^k + C_n^k + \cdots + C_n^k + C_n^k.$$

Făcând suma termenilor acestui tablou pe coloane, avem:

$$S = \sum_{i=1}^{n-k} C_{k+i}^k + \sum_{i=2}^{n-k} C_{k+i}^k + \sum_{i=3}^{n-k} C_{k+i}^k + \cdots + \sum_{i=n-k}^{n-k} C_{k+1}^k + \sum_{i=n-k}^{n-k} C_{k+i}^k$$

sau, ceva mai condensat:

$$(1) \qquad S = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{i=j}^{n-k} C_{k+i}^k.$$

Observând acuma că:

$$\sum_{i=j}^{n-k} C_{k+i}^k = \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i}^k - \sum_{i=0}^{j-1} C_{k+i}^k = C_{n+1}^{k+1} - C_{k+j}^{k+1},$$

relaţia (1) se va putea scrie la rândul ei şi sub forma:

$$S = \sum_{j=1}^{n-k} (C_{n+1}^{k+1} - C_{k+j}^{k+1})$$

de unde, în continuare, deducem:

$$(2) \qquad S = \sum_{j=1}^{n-k} C_{n+1}^{k+1} - \sum_{j=1}^{n-k} C_{k+j}^{k+1} =$$

$$(n-k)C_{n+1}^{k+1} - \sum_{i=0}^{n-k+1} C_{(k+1)+i}^{(k+1)} = (n-k)C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^{k+1},$$

dat fiind că, în a doua sumă parţială din membrul doi am înlocuit de j prin $i+1$.

Ţinând mai departe seama că

(3) $$C_m^p = C_m^{m-p}$$

şi deci că

$$C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^{n-k},$$

din (2) obţinem:

(4) $$S = (n-k)\, C_{n+1}^{n-k} - C_{n+1}^{k+1}.$$

Dar, cum pe de altă parte

(5) $$p\, C_m^p = m\, C_{m-1}^{p-1}$$

$$(n-k)\, C_{n+1}^{n-k} = (n+1)\, C_n^{n-k-1},$$

relaţia (4), la rândul ei, devine:

$$S = (n+1)\, C_n^{n-k-1} - C_{n+1}^{k+2}$$

ceiace, dacă avem iarăşi în vedere relaţia (3), se scrie:

(6) $$S = (n+1)\, C_n^{k+1} - C_{n+1}^{k+2}.$$

Dar, să ne raportăm şi la relaţia (5); făcând $m = n+1$ şi $p = k+2$, această relaţie ne va da

(7) $$(k+2)\, C_{n+1}^{k+1} = (n+1)\, C_n^{k+1}$$

aşa încât din (6) vom avea atunci

$$S = (k+2)\, C_{n+1}^{k+2} - C_{n+1}^{k+1}$$

şi strângând rezultatul, în cele din urmă obţinem:

(8) $$\boxed{S = (k+1)\, C_{n+1}^{k+2}},$$

adică, chiar formula pentru calculul sumei definite prin enunţul problemei.

Soluţia 2-a. Suma propusă pentru calcul, se poate scrie condensat sub forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n-k} i\, C_{k+i}^{k}$$

sau încă, având în vedere relaţia: şi sub forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n-k} i\, C_{k+i}^{i}.$$

Dar, cum pe de altă parte:

$$i\, C_{k+1}^{i} = (k+1)\, C_{k+i}^{k+1},$$

ceia ce-i uşor de constatat, ultima expresie a sumei S devine:

$$S = (k+1) \sum_{i=1}^{n-k} C_{k+i}^{k+1}$$

aşa încât, prin intermediul formulei cunoscute

(9) $$\sum_{i=1}^{n-k} C_{k+i}^{k+1} = C_{n+1}^{k+2}$$

în cele din urmă avem

$$S = (k+1)\, C_{n+1}^{k+2},$$

rezultat identic aceluia din prima soluţie.

Observare. In moduri absolut analoage se poate stabili formula:

(10) $$\sum_{i=1}^{n-k} (k+i)\, C_{k+i}^{k} = k\, C_{n+1}^{k+1} + (k+1)\, C_{n+1}^{k+2}.$$

De altfel, bazându-ne pe cele precedente, precum şi pe formula constituită de relaţia (9), formula (10) se poate obţine ca explicaţie directă a formulei (8), de oarece primul membru al ei se poate scrie

$$\sum_{i=0}^{n-k} (k+i)\, C_{k+i}^{k} = \sum_{i=0}^{n-k} k\, C_{k+i}^{k} + \sum_{i=0}^{u-k} i\, C_{k+i}^{k} =$$

$$k \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i}^{k} + \sum_{i=0}^{n-k} i\, C_{k+i}^{k}$$

de unde, precum se vede, membrul doi al acestei formule apare apoi imediat.

Au dat soluţii analoage cu prima. d-nii: *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Ionescu C. Victor*, *Malita A. Mircea* (Lic. Beiuş), *Rădulescu V. Nicolae* (Călăraşi) şi *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (Lic. Milit,, Timişoara).

Problema 2155. — *Se cer două numere de forma a b c d şi b o b al căror produs este de forma c o d c c c, ştiind că,*

$$a + b + c = d = 2c.$$

LIVIU GROZESCU

Soluţie. Din relaţie

(1) $$d = 2c,$$

rezultă $d =$ mult. 2 şi atunci, având în vedere şi relaţia

(2) $$a\,b\,c\,d \times b\,o\,b = c\,o\,d\,c\,c\,c,$$

rezultă că şi c este par.

Cum c şi d sunt pare, de o singură cifră şi satisfac relaţia (1), putem lua numai

$1^0.\ c=2,\ d=4, \qquad 2^0.\ c=4,\ d=8.$

Cazul $c=2,\ d=4$. In acest caz, având în vedere relaţiile din enunţ, deducem $a+b=2$, deci $a=1,\ b=1$, căci a şi b sunt cifre semnificative. In aceste condiţii, egalitatea (2) nu poate fi satisfăcută, căci cifra $c=2$, nu poate proveni din 4×1, şi deci n'avem soluţie pentru problemă.

Cazul $c=4,\ d=8$. Privind relaţia (2), cum $d=8$ şi $8\times b$ trebue să se termine cu c, adică cu 4, putem lua numai $b=3$, sau $b=8$. Dacă $b=3$, relaţia $a+b+c=d$, adică $a+3+4=8$, ne dă $a=1$. (Evident că $b=8$, nu putem lua).

Astfel cele două numere cerute pot fi

1348 şi 303,

care înmulţite ne dau

$$1348\times 303=408444,$$

adică un număr de forma $c\,o\,d\,c\,c\,c$.

Numerile cerute sunt. 1348 şi 303.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Chiriac C-tin* (Lt., Constanţa), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Giurconiu Gh. Mihail* (Lic., Tg.-Jiu), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Ieşan Alexandru* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Knopf Hermann* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt.), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Marinescu N*, *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pleşcan D. Ion* (Lic., Tulcea), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Pupezescu Gh. Ion*, *Rogoz V. Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Stretea I. Alexandru* (Polit.. Timişoara), *Teiuşanu I. Horia* (Lic., Beiuş), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara), *Vrânceanu G. Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2162. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, astfel ca primele două cifre ca şi ultimele două să formeze patrate perfecte, cel de al doilea să înceapă cu cifra cu care se termină primul şi mai ştiind că cifra semnificativă din mijloc este un cub perfect.*

MARCEL D COTARIU

Soluţie. Fie $a\,b\,c\,d\,e$ patratul cerut. Cum $a\neq 0$, $a\,b$, care este patrat perfect, poate fi

(1) 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Dar $d\,e$ fiind şi el patrat perfect, se găseşte printre numerile din şirul (1) şi ţinând seamă că $d=b$, nu putem lua din şirul (1), pentru $a\,b$, de cât numai

16, 36, 64

pentru care corespunde lui $d\,e$, respectiv, 64, 64 şi 49.

Mai având în vedere că, c este cub perfect, adică 1 sau 8, rezultă că patratul cerut se găseşte printre numerile

16164, 36164, 64149

16864, 36864, 64849.

Dintre acestea, numai 36864 este patrat perfect,

$$36864=192^2$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Avram Cristache* (Lic., Brăila), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Chiriac I. C-tin* (Lt., Marina Regală), *Cicirean Gh.* (Arad), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Enache Ion* (Slt., Giurgiu), *Georgescu C. Nicolin* (Polit., Timişoara), *Giurconiu Gh. Mihail* (Lic., Tg.-Jiu), *Gligor N*, *Ioan* (student, Timişoara), *Ieşan Alexandru* (Lic., Matei Basarab, Bucureşti). *Munteanu Gh. Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu S. Antim* (Polit , Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pleşcan D. Ion* (Lic., Tulcea), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Pupezescu Gh. Ion*, *Rogoz V. Ion* (Lic. Milit. Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Vrânceanu G. Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2164. — Să se rezolve ecuaţia

$$2^{4x}+2^{4x-1}+4^{2x-3}+2^{4x-3}+16^{x-1}=31.$$

CAP. EUGEN ŞT. IACOB

Soluţie. Ecuaţia dată se mai poate scri,

$$2^{4x}+2^{4x-1}+2^{4x-2}+2^{4x-3}+2^{4x-4}=31,$$

sau

$$2^{4x}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)=31.$$

Efectuând calculele din paranteză, putem scri încă

$$\frac{31}{16}2^{4x}=31,$$

de unde

$$2^{4x}=16=2^4$$

şi prin urmare rezultă,

$$x=1.$$

Soluţii date de d-ra *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Avram G. Hristache* (Lic. Brăila), *Barbu I. Popescu* (Lic. Milit., Timişoara), *Brazoveanu D. Gheorghe*

(lic. T-Severin), *Cârnaţiu I. Ion* (lic. Blaj), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt., Constanţa), *Cicirean Gh.* (lic. Arad), *Constantinescu N. Ilie* (lic. Brăila), *Cotariu D Marcel* (Brăila), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *David Vasile* (Facultatea de Ştiinţe, Timişoara), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea I.* (Polit, Timişoara), *Hendli M. Martin* (Lic. Brăila), *Ionescu C. Victor*, *Kinshy Ioan* (Timişoara), *Lupescu Adrian* (lic. Brăila), *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Malita A. Mircea* (lic. Beiuş), *Munteanu Gh. Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit, Timişoara), *Pupezescu Gh. Ion* (Gura-Ocniţei), *Rădoiu N. Nicolae* (Polit., Timişoara), *Rogoz V. Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Stefănescn Marin* (Lt., Brăila), *Teiusanu I. Horia* (Lic. Beiuş), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tudor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara), *Vrânceanu G. Gh.* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2217. — Să se găsească un număr de cinci cifre, a cărui rădăcină cubică este numărul format cu primele sale două cifre.

M. GHERMANESCU

2218. — Se consideră exagonul regulat $a\,c\,e\,g\,i\,m$, în centrul căruia se scrie numărul 648. Fie b, d, f, h, k, p mijloacele laturilor $a\,c$, $c\,e$, $e\,g$, $g\,i$, $i\,m$, $m\,a$. Să se scrie în punctele de mai sus numerele 642—654 (648 exceptat), astfel ca suma numerelor din punctele unei laturi (mijloc şi extremităţi), sau de pe o diagonală să fie egală cu 1944.

Mai departe; să avem

$$a^2+b^2+c^2=i^2+h^2+g^2$$
$$c^2+d^2+e^2=i^2+k^2+m^2$$
$$a^2+p^2+m^2=e^2+f^2+g^2.$$

A. MOESSNER

2219. — Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţia

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{5}{5.9}+\cdots+\frac{1}{(2x+1)(2x+5)}=a$$

soluţii întregi.

G-L GH. BUICLIU

2220. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3y^3(x^3y^3-3)-2xy\sqrt{xy}(x^3y^3-2)+4=0 \\ x^2y^2(x^2-y^2)+2\sqrt{xy}(x^3y^2-x^2y^3)+9xy(y-x)=0. \end{cases}$$

LIVIU GROZESCU

2221. — Se dau două cercuri C_1 şi C_2 de centre O_1 şi O_2. Fie un punct P în planul acestor două cercuri. Dreptele PO_1 şi PO_2 tae cercurile C_1 şi C_2 respectiv în A_1 şi A_2.

Să se găsească locul geometric al punctelor P astfel ca

$$\frac{PA_1}{PA_2}=\frac{OA_1}{OA_2}.$$

ION DILI SCHILERU

2222. — Intr'un triunghiu ABC, pe prelungirile înălţimelor AA′, BB′, CC′ se iau trei segmente aşa fel ca

$$A'A_1+m.AA', B'B_1=m.BB', C'C_1=m.CC'.$$

Dacă notăm cu S suprafaţa triunghiului, cu S′ suprafaţa triunghiului ortic şi cu S_1 suprafaţa triunghiului $A_1B_1C_2$, să se arate că avem relaţia

$$S_1=m(1+2m)S+(m+1)^2S'.$$

GH. TH GHEORGHIU

2223. — Intr'un triunghiu ABC al cărui centru al cercului înscris este I, cercurile înscrise de centre α, β, γ triunghiurilor BIC, CIA, AIB ating BC, CA, AB în α', β', γ'. Să se arate că dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt concurente, de asemenea şi dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$.

V. THÉBAULT

2224. — Intr'un cerc O, fie AB un diametru, CD o coardă oarecare, A_1, B_1 proecţiile pe coardă a punctelor A, B, iar C_1, D_1 proecţiile pe diametru a punctelor C, D.

Să se stabilească relaţiile:

$$\overline{AA_1^2}\cdot\overline{C_1B}=\overline{CC_1^2}\cdot\overline{AD_1}.$$
$$\overline{BB_1^2}\cdot\overline{AD_1}=\overline{DD_1^2}\cdot\overline{BC_1}.$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bică Emilian, (2115, 2164, 2196, 2213); **Bîrănaş Ioan,** (P., 2116, 2155, 2156, 2157, 2198, 2202, 2207, 2213), **Bosie Boriş,** (2071, 2083, 2106, 2107, 2154, 2155, 2160, 2213); **Braşoveanu Gheorghe,** (2120, 2139, 2187, 2188, 2191, 2193); **Chiriac Constantin,** (2090, 2115, 2116, 2170, 2175, 2181, 2185, 2186, 2187, 2188, 2191, 2192, 2193, 2194, 2196, 2198, 2190 2202, 2203, 2207, 2208); **Cochela Livius,** (2130, 2195); **Constantinescu Ile,** (2151, 2156, 2188, 2194, 2195, 2198, 2207, 2213); **Filimon Ioan,** (2123, 2139). **Gâţă Gheorghe,** (2123, 2125, 2130, 2131, 2145, 2155, 2161, 2162, 2164, 2170, 2178, 2181, 2191, 2192, 2195, 2196); **Gluconiu Mihail,** (2034, 2086, 2171, 2202); **Grozescu Liviu,** (2162, 2164, 2181, 2183, 2185, 2187, 2188, 2192, 2198, 2207); **Ieşan Alexandru,** (2187, 2190); **Mahrenholz Johannes,** (2195, 2197, 2198); **Mărmureanu Gheorghe,** (2213); **Mazilu Marius,** (2114, 2120, 2121, 2125, 2134, 2142, 2154, 2157, 2161, 2162, 2164, 2168, 2170, 2177, 2178, 2181, 2190, 2198, 2211, 2213). **Munteanu Lucian,** (P; 2116, 2120, 2121, 2124, 2125, 2126, 2132, 2139, 2155, 2156, 2191, 2192); **Popescu Barbu,** (2107, 2115, 2139, 2145, 2186, 2187, 2191, 2196, 2207, 2210, 2211); **Rogoz Teodor,** (2146, 2190); **Serengău Mihai,** (2115, 2125, 2161, 2180, 2197); **Simeso Carol,** (2190, 2207); **Tincu Constantin,** (P.; 1883, 1898, 2070, 2125, 2180, 2203, 2207, 2210, 2213); **Tulvan Mircea,** (2115, 2120, 2148, 2155, 2162, 2164, 2170, 2187, 2190). **Ţigănoiu Alexandru,** (1703, 2190, 2207); **Vrânceanu Gheorghe,** (2210, 2211); **Wegener Eugen,** (N.; P.; 1492, 1496, 1516, 2107, 2125, 2134, 2137, 2139, 2141, 2181. 2186).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii I—XXII, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIII, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

ANUL XXIV. MAI 1944 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **G. IUGA:** O PROBLEMA DE ANALIZA NEDETERMINATA.
2. **O. N. TINO:** CONTRIBUTIE LA REZOLVAREA IN NUMERE INTREGI A ECUATIEI NEDETERMINATE OMOGENE DE GRADUL AL TREILEA.
3. NOTE MATEMATICE 6, 7, 8.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1939, 2156, 2161, 2170, 2172, 2187
6. PROBLEME PROPUSE: 2225—2232.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noăstre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 3. TIMISOARA, MAI 1944.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

O PROBLEMĂ DE ANALIZĂ NEDETERMINATĂ.

DE

G. IUGA.

(Urmare).

In categoria *a treia* rămân de grupat soluțiile de forma

$$x = 3a + 1$$
$$y = 3b + 1$$
$$z = 3c - 1$$

și cele rezultate din permutarea acestor elemente, precum și opusele acestora.

In aceste condițiuni S și, în consecință T, nu sunt divizibili cu 3 Aplicând ecuației (1) regulile calculului cu congruențe, obținem pe rând

$x + y + z \equiv t\,x\,y\,z$, de unde $t \equiv -1 \pmod 3$.

Aceasta denotă că și *categoria a treia de soluții este restrânsă la valori speciale ale parametrului t.*

7. In ceeace privește semnele, elementele unei soluții pot avea toate trei același semn, sau două elemente au același semn, iar al treilea semnul contrar. Este deajuns să cercetăm soluțiile ale căror elemente sunt toate pozitive, sau două pozitive și al treilea negativ, căci la soluțiile opuse acestora vom întâlni în mod necesar cazurile contrare Dacă dovedim pentru un parametru dat al ecuației că nu există soluții de un anumit fel, atunci putem fi siguri că nu există nici de felul opus.

Ecuația (5) ne arată imediat că *soluții cu toate elementele pozitive (negative) pot exista numai pentru* $t \geqq 3$, *așa dară pentru* $t < 3$ *toate soluțiile posibile sunt cu semne mixte.*

Când descompunem un număr algebric în doi factori, putem atribui unuia din factori oricare din cele două semne, + sau —, rămânând ca factorul celălalt să primească semnul cuvenit pentru a reproduce la produs semnul cu care este înzestrat numărul ce a fost descompus.

De vreme ce la § 2 am descompus numerele x, y, z și $t-3$ în câte doi factori, vom conveni să atribuim, în baza celor premergătoare, semnul + factorilor x_2, y_2, z_2 și t_2, acest mod de fixare a semnelor satisfăcând totodată condițiunea ca T să fie pozitiv. In mod necesar factorii x_1, y_1 și z_1 se vor conforma semnelor elementelor corespunzătoare, iar $t_1 \gtrless 0$ dupăcum $t \gtrless 3$.

Odată fixat în acest chip, regimul semnelor, urmează ca și numerele x_4, y_4 și z_4 să fie toate trei pozitive, pentru motivul că expresiile de tipul $a^2 \pm ab + b^2$ reprezintă numere pozitive, iar x_3, y_3 și z_3 vor lua semnele impuse de relațiile (3) și (4). Observăm că la soluțiile $(-1, 1, k, -k^2)$ avem $z_3 = 0$, iar pentru soluția specială $(-1, 1, 1, -1)$ avem $y_3 = z_3 = 0$.

Este evident că, prin chiar definiția lor, numerele x_2, y_2, z_2, x_4, y_4 și z_4 sunt impare. Totodată relația (9) ne dovedește că, sub regimul semnelor adoptat de noi, și coeficientul n trebue să fie pozitiv și impar. La fel se comportă și coeficienții similari l și m, adecă sunt pozitivi și impari.

8. Când o soluție are toate elementele impare, o vom numi — pentru prescurtarea vorbirii — *impară*, iar când unul din elemente este par, atunci o vom numi *pară.*

Examinând ecuația (1), vedem imediat că o soluție impară este posibilă numai pentru valori impare ale parametrului t. Pentru o astfel de soluție, S este impar și în consecință, T par, însă despre T am văzut la § 5 că trebue să conțină în acest caz cel puțin doi factori de 2 și, cum produsul $x_2 y_2 z_2$ este totdeauna impar, se impune ca t_2 să cuprindă pe toți factorii de 2 ce figurează în $t-3$, căci t_1 trebue considerat de astă dată impar. Așadară când

$t-3$ conține un singur factor 2, soluția impară este imposibilă.

Soluțiile impare le vom despărți în două grupe, după cum elementele unei soluții dau, sau nu dau, același rest în raport cu modulul 4.

In prima grupă vom avea sistemul de valori (considerând $\varepsilon = \pm 1$)

$$\left.\begin{aligned} x &= 4a+\varepsilon \\ y &= 4b+\varepsilon \\ z &= 4c+\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ cu } T = 16\,T',$$

unde

$$T' = a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab,$$

iar în a doua grupă

$$\left.\begin{aligned} x &= 4a+\varepsilon \\ y &= 4b+\varepsilon \\ z &= 4o-\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ cu } T = 4[4T'+2\varepsilon(a+b-2c)+1].$$

Constatăm că *soluțiile din grupa a doua sunt posibile numai când* $t-3$ *se divide cu* 4, *dar nu cu* 8.

Pentru soluțiile din prima grupă vom arăta că $t-3$ *trebue să conțină un număr par de factori de 2 și cel puțin patru.*

In acest scop vom analiza structura numărului T', în compoziția căruia intră numerele a, b, c, nesupuse condițiunii de a fi prime între ele. Luând în considerare cazul general, vom scrie

$$a = 2^{k_1} a_1 \qquad b = 2^{k_2} b_1 \qquad c = 2^{k_3} c_1,$$

unde a_1, b_1, c_1 sunt numere impare.

Când numai unul sau doi din exponenții k_1, k_2, k_3 sunt nuli, atunci se verifică imediat că T' este număr impar. In acest caz T și $t-3$ au câte patru factori de 2.

Când nici unul din exponenți nu este nul, dar nu sunt toți trei egali, atunci de asemenea se poate verifica cu ușurință că T' conține $2k$ factori de 2, k reprezentând valoarea exponentului celui mai mic.

In acest caz T și $t-3$ au câte $4+2k$ factori de 2.

Când toți trei exponenții sunt egali cu $k \geqq 0$, atunci

$$T' = 2^{2k}(a_1^2+b_1^2+c_1^2-b_1c_1-c_1a_1-a_1b_1).$$

Insemnăm cu T'' numărul din paranteză. Despărțind sistemele de câte trei numere impare (a_1, b_1, c_1) în două grupe, după cum dau, sau nu dau, același rest față de modulul 4, constatăm, ca mai sus, că sau $T'' = 16\,T'''$, sau T'' este împătritul unui număr impar. T''' va avea structura similară cu T' cu deosebirea că componentele sale sunt mai mici în valoare absolută. Ciclul de raționamente se poate deci repeta până ce se închide dela sine, din cauza micșorării treptate a componentelor succesive.

Acest procedeu algoritmic duce la concluzia finală că *soluții impare ale ecuației* (1) *sunt posibile, numai când* $t-3$ *are un număr par de factori de* 2.

9. Folosindu-ne de cele stabilite în cele premergătoare, să arătăm că *pentru* $t=-6$ *nu există soluții complete.*

In primul rând constatăm că parametrul -6 nu satisface condițiile referitoare la soluțiile din categoriile a doua și a treia. Presupunând că există soluții din prima categorie, vedem că acestea trebue să fie pare, elementele să aibă semne mixte, și unul din elemente (z) să fie multiplu de 3. La § 6 am stabilit că în cazul de față z_2 nu admite divizorul 3 și că în schimb t_2 trebue să-l admită, însă numai la puterea întâia, pentru motivul că T cuprinde un singur factor 3. In consecință, fiindcă $t-3=-9$, se impune descompunerea $t_1=-3$ și $t_2=3$, ca singura posibilă la sistemul de semne adoptat.

Ecuația (10) devine

$$l x_1^3 + m y_1^3 + n z_1^3 = 0, \tag{15}$$

unde z_1 multiplu de 3, iar relația (11) dă

$$l\,m\,n = 27.$$

Prin urmare, pentru determinarea valorilor numerice l, m, n avem posibilitățile 1, 3, 9 sau 1, 1, 27 sau 3, 3, 3, precum și cele obținute prin permutare. Oricare din permutările primului sistem, introdusă în (15), dă câte o relație numerică imposibilă, căci ar urma ca un număr nedivizibil cu 3 să fie egal cu suma a doi multiplii de 3. In cazurile 3, 9, 1 și 9, 3, 1 se va simplifica ecuația cu 3, ținând seama că z_1 conține acest factor prim.

Celelalte două sisteme și permutările lor transformă (15) în cunoscuta ecuație a lui *Fermat*, pentru care lipsa de soluții complete este de multă vreme demonstrată.

10. Putem demonstra şi pe altă cale că ecuaţia (1) n'are soluţii complete pentru $t = -6$,

Notând, pentru prescurtare, xyz cu S_3 şi $yz+zx+xy$ cu S_2, ecuaţia (5) se poate scrie, dacă ţinem seama de (14),

$$(16) \qquad (t-3)S_3 = S(S^2 - 3S_2).$$

Structura numerelor S, S_2, S_3 ne arată că elementele x, y, z pot fi privite ca rădăcinile ecuaţiei de gradul al treilea în U

$$U^3 - SU^2 + S_2 U - S_3 = 0,$$

cu condiţia ca coeficienţii acestei ecuaţii să satisfacă relaţia (16).

Efectuând în ultima ecuaţie substituţia

$$U = V + s, \text{ unde } s = \frac{S}{3},$$

şi eliminând pe S_3 cu ajutorul relaţiei (16), obţinem ecuaţia în V

$$V^3 + (S_2 - 3s^2)V + \frac{(t+6)sS_2 - (2t+21)s^3}{t-3} = 0.$$

Substituţia folosită are ca consecinţă relaţiile

$$(17) \qquad V_1 = x - s \quad V_2 = y - s \quad V_3 = z - s,$$

unde V_1, V_2, V_3 reprezintă cele trei rădăcini în V.

Pentru $t = -6$ ecuaţia în V devine

$$V^3 + (S_2 - 3s^2)V + s^3 = 0,$$

unde $s = -x_1 y_1 z_1$, căci $S = t_1 x_1 y_1 z_1$ şi am văzut (la §. 9) că $t_1 = -3$.

Aşa dară produsul celor trei rădăcini în V este egal cu $x_1^3 y_1^3 z_1^3$.

Ţinând seama de egalităţile (17), suntem obligaţi să repartizăm factorii produsului, asupra fiecărei rădăcini în parte, în chipul următor

$$V_1 = x_1^3 \quad V_2 = \pm y_1^3 \quad V_3 = \pm z_1^3,$$

fiindcă orice deplasare a factorilor parţiali (cuprinşi în x_1, y_1, z_1) dela o rădăcină la alta, ar veni în contradicţie cu egalităţile (17), întrucât, dacă am introduce, de pildă, în V_1 unul din factorii primi ai lui y_1 respectiv z_1, atunci prima egalitate (17), devenită în cazul de faţă

$$V_1 = x + x_1 y_1 z_1,$$

ar impune ca şi x să fie divizibil cu acel factor prim, ceeace este contrar definiţiei sale.

(Va urma).

CONTRIBUŢIE LA REZOLVAREA IN NUMERE INTREGI A ECUAŢIEI NEDETERMINATE OMOGENE DE GRADUL AL TREILEA.

DE

O. N. ŢINO.

Ecuaţia nedeterminată omogenă şi de gradul al treilea a fost examinată în cazul particular $x^3 + y^3 = Az^3$ de *Fermat* şi alţi cercetători următori, iar în cazul general de *Cauchy*, *Lagrange*, *Ed. Lucas*, etc.

Ed. Lucas (N. A. de Math. 1878) considerând ecuaţia omogenă de gradul al treilea ca reprezentând o cubică în coordonate rectilinii şi omogene, dă următoarele trei procedee pentru obţinerea, dintr'o soluţie în numere întregi cunoscută, şirurile de soluţii în numere întregi şi anume: *1°*. Dacă ducem tangenta la cubică în punctul m_1 (soluţia cunoscută), această dreaptă întâlneşte cubica în al treilea punct m, *ale cărui coordonate sunt necesar raţionale.*

Se exceptează cazul când tangenta are direcţia asimptotică sau când tangenta ar fi dusă în *un punct de inflexie.* [*Ed. Lucas* recunoaşte în acest procedeu, metoada dată de *Fermat* pentru ecuaţia $x^3 + y^3 = Az^3$ şi de *Lagrange* pentru ecuaţia generală].

2. Dacă m_1 şi m_2 sunt două puncte ale cubicei de coordonate raţionale (deci de coordonate omogene întregi) obţinem în general, o nouă soluţie întreagă, luând intersecţia secantei celor două puncte cu cubica considerată. [*Ed. Lucas* recunoaşte în al doilea procedeu metoada dată de *Cauchy* pentru ecuaţia $Ax^3 + By^3 + Cz^3 - 3Dxyz = 0$].

3°. Dacă cunoaştem cinci soluţii întregi ale ecuaţiei propuse, obţinem, în general, o a şasea soluţie întreagă, luând punctul de intersecţie al cubicei cu conica celor cinci puncte cunoscute.

Cu ocazia rezolvării problemei *4062*, propusă de *D-l Prof. Ion Ionescu* în *Gazeta Matematică*, *D-l I. B. Florescu* folosind observările date de *Ed. Lucas*, deduce observând încă că toate cubicile

$$(2) \qquad x^3 + y^3 - txy + 1 = 0,$$

având punctele de coordonate raţionale $A(-1, 0)$ şi $B(0, -1)$, celelalte două puncte de intersecţie ale cubicei (2) cu o dreaptă, trecând prin unul din punctele A sau B, *sunt sau amândouă raţionale*

sau *amândouă iraționale.* Luând dreapta de coeficient unghiular u trecând prin B, arată că rezolvarea în numere raționale a ecuației (2) revine la rezolvarea în numere raționale a ecuației

$$(3) \quad -3u^4+2tu^3+t^2u^2-12u-4t=v^2.$$

Acest procedeu este evident valabil pentru o cubică oarecare, dacă determinarea unui punct rațional pe cubică este imediată sau ușoară, cum este în cazul exemplului citat, când cubica are punct rațional pe una din axele de coordonate.

Dacă considerăm cazul cubicei în coordonate omogene având ecuația:

$$(4) \quad x^3+y^3+z^3+A_1x^2z+A_2xz^2+B_1y^2z+B_2yz^2+Dxyz=0$$

punctele depe axele OX și OY sunt date de ecuațiile:

$$(5) \quad \begin{matrix} x^3+A_1x^2+A_2x+1=0, \\ y^3+B_1y^2+B_2y+1=0, \end{matrix}$$

deci dacă

$$(6) \quad A_1\neq A_2;\ A_1+A_2+2\neq 0;\ B_1\neq B_2,\ B_1+B_2+2\neq 0,$$

atunci cubica n'are puncte raționale pe axa OX sau OY.

In toate cazurile însă cubica

$$(4') \quad x^3+y^3+A_1x^2+B_1y^2+Dxy+A_2x+B_2y+1=0$$

are o direcție asimptotică reală de coeficient unghiular rațional

$$(7) \quad y=-x.$$

Intersecția cubicei (4') cu o dreaptă având direcția asimptotică (7), dă două puncte care sunt *amândouă raționale* sau *amândouă iraționale* și putem obține condiția pentru ordonata la origine λ a acestei drepte pentru ca să avem puncte de intersecție raționale. Dacă această condiție determină valori raționale de λ, punctele corespunzătoare de intersecție ale cubicei sunt raționale.

Considerăm cele arătate ca fiind un nou procedeu pentru cazul general al ecuației omogene de gradul al treilea, când nu putem determina ușor o soluție întreagă a acestei ecuații, însă există o direcție asimptotică reală de coeficient unghiular rațional pentru cubica corespunzătoare.

2. Ca aplicație, să ne ocupăm de ecuația omogenă de gradul al treilea

$$(1) \quad x^3+y^3+z^3-txyz=0$$

în care x, y, z, t sunt numere întregi, t fiind considerat parametru.

Tăind cubica

$$(1') \quad \varphi(x,y)\equiv x^3+y^3-txy+1=0$$

cu dreapta:

$$(8) \quad y=-x+\lambda,$$

ecuația absciselor punctelor de intersecție este:

$$(9) \quad (3\lambda+t)x^2-\lambda(3\lambda+t)x+(\lambda^3+1)=0.$$

Această ecuație dispare complect, dacă $\lambda=-1$ și $t=3$, deci dreapta $x+y+1=0$, face parte din cubica corespunzătoare lui $t=3$ și ca urmare această cubică se descompune în această dreaptă și punctul dublu izolat I $(+1,+1)$.

Așadar, pentru $t=3$, orice punct rațional al dreptei $x+y+1=0$ dă o soluție întreagă a ecuației (1), iar în plus avem soluția singulară evidentă: $X=Y=Z$ Acest rezultat a fost obținut de D-l *Prof. G. Iuga* pe altă cale.

a. Vom presupune deci $t\neq 3$. Pentru ca ecuația (9) să aibă soluții raționale, trebue și este de ajuns să avem:

$$(10) \quad \lambda^2(3\lambda+t)^2-4(\lambda^3+1)(3\lambda+t)=v^2$$

sau încă

$$(11) \quad -3\lambda^4+2t\lambda^3+t^2\lambda^2-12\lambda-4t=v^2.$$

Cum arată *D-l I. B. Florescu* ecuația (12), de gradul al patrulea în λ, se rezolvă prin unul din procedeele date de *Fermat* pentru ecuația generală

$$(12) \quad ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=z^2.$$

Pentru $t=-\alpha^2$, regăsim evident soluția primă dată de *D-l I. B. Florescu.* In cazul când e nu e pătrat perfect, cunoașterea unei soluții particulare a ecuației (12), conduce la o ecuație (12) în care e este patrat perfect. La o soluție particulară (λ_0, v_0) a ecuației (11), cum a fost observat, corespunde o soluție particulară a ecuației (1), dar și o soluție particulară (x_0, y_0, z_0, t_0) ecuației (1) dă o soluție particulară a ecuației (11) pentru aceeași valoare a lui t.

In adevăr, cunoscând un punct rațional pe cubica corespunzătoare lui $t=t_0$, prin el trece o

dreaptă D_0 cu direcția asimptotică, iar ordonata la origine a acestei drepte D_0 este dată de

$$\lambda_0 = y_0 - x_0 \tag{14}$$

deci λ_0 și t_0 fiind cunoscuți, ecuația (11) determină pentru v valoarea corespunzătoare v_0. Dar soluția particulară (u_0, v_0) conduce, în general, la un șir de soluții ale ecuației (11) obținute prin procedeul lui *Fermat;* fiecare din ele dă o soluție primă pentru ecuația (1).

Demn de observat este faptul că rezolvarea ecuației (1′) depinde de rezolvarea ecuației (11). Imposibilitatea uneia din ele în numere iraționale aduce pentru cealaltă ecuație aceeași proprietate.

Interesantele rezultate obținute de D-l *Prof. G. Iuga* cu privire la ecuația (1), dă o lumină completă asupra problemii soluției generale. D-sa a arătat în primul rând că sunt valori ale parametrului t, de exemplu $t = -6$, pentru care ecuația (1) este imposibilă în numere întregi. Asemenea a arătat că pentru $t = -1$ și $t = 5$ ecuația (1) are câte o singură soluție întreagă primă. Astfel se pune clar problema de a găsi procedee prin care să se poată obține soluții particulare corespunzătoare unei valori întregi de t număr întreg.

3. Cum a fost observat în soluțiile date până în prezent problemii *4062*, pentru ca valoarea lui $t = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$ număr întreg este necesar ca fiecare din numerele întregi x, y, z să fie divizor al sumii cuburilor celorlalte două; de exemplu z trebue să fie divizor numărului

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

In particular pot fi căutate soluții particulare în care z să fie divizor al numărului $x + y$, sau sosoluții particulare în care z să fie divizor al numărului $(x^2 - xy + y^2)$, sau în alte condiții ce urmează a fi precizate mai târziu.

a. In ipoteza că z este divizor lui $(x + y)$, D-l *I. B. Florescu* obține următoarele soluțiile depinzând de un parametru

$1^0.\ x = \beta^2 + 1,\ y = -1,\ z = \beta^2$

$2^0.\ x = \beta^2 - \beta + 1,\ y = -1,\ z = \beta - 1$

$3^0.\ x = \beta^2 - \beta + 1,\ y = -(\beta + 1),\ z = \beta - 2.$

Completând aceste soluții cu valoarea corespunzătoare a lui t avem:

$$[\beta^2 + 1, -1, \beta^2/\beta(\beta^3 + 3)];$$

$$[\beta^2 - \beta + 1, -(\beta + 1), (\beta - 2)/\beta^2 - \beta + 4];$$

$$[\beta^2 - \beta + 1, -1, \beta - 1/-(\beta^3 - \beta^2 + 2\beta + 2)].$$

A treia din aceste soluții depinzând de un parametru, este aceea dată de D-l *Gh. Constantinescu* (G. M. XLVI), e suficient să luăm $\beta = \alpha + 1$.

Punând în acest caz tratat: $x + y = kz$, avem din ecuația (1)

$$t = -3k + \frac{k^3 + 1}{xy} z^2.$$

Pentru construirea tablelor numerice dăm lui k succesiv valorile ± 1; ± 2; ± 3; și alegem pentru x și y doi divizori ai lui $(k^3 + 1)$, primi între ei și astfel ca $x + y \equiv 0 \pmod{k}$. Valoarea $k = -1$ o înlăturăm, ea corespunde cazului $t = +3$, tratat.

Avem astfel tabloul de soluții întregi:

k	$+1$	$+2$	$+2$	$+2$	-2	$+3$
x	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1
y	$+2$	$+3$	$+9$	$+9$	$+7$	$+28$
z	$+3$	$+2$	$+5$	$+4$	-4	$+9$
t	6	$+6$	$+19$	-22	-10	-90

b. Problema determinării soluțiilor numerice în ipoteza că z este divizor lui $(x^2 - xy + y^2)$ n'a fost examinată în nici una din soluțiile publicate. Punând pentru acest caz:

$$x^2 - xy + y^2 = kz \tag{15}$$

avem egalitatea:

$$t = \frac{k(x + y) + z^2}{xy}. \tag{16}$$

Procedeul practic pentru alcătuirea unui tablou de soluții numerice corespunzând ipotezei de față, nu este evident ca în cazul precedent. Amintim proprietatea cunoscută, *că dacă x și y sunt prime între ele, numărul $(x^2 + xy + y^2)$ este totdeauna impar*, deci k și z sunt numere impare. Dacă punem acum

$$x + y = v, \tag{17}$$

avem

$$xy = \left(\frac{v^2 - kz}{3}\right), \tag{18}$$

partea a doua în (18) fiind număr întreg. Făcând acum ecuația, care determină pe x și y și punând

condiția ca x și y, rădăcinile acestei ecuații, să fie întregi, trebue să determinăm pe v, z, k astfel ca să avem:

$$4kz - v^2 = 3w^2$$

sau încă:

$$v^2 + 3w^2 = 4kz. \tag{20}$$

Folosind o teoremă a lui *Lagrange* și punând

$$4k = l^2 + 3m^2 \text{ și } z = z_1^2 + 3z_2^2 \tag{21}$$

găsim în baza identității

$$(l^2+3m^2)(z_1^2+3z_2^2) \equiv (lz_1 - 3mz_2)^2 + 3(lz_2 + mz_1)^2, \tag{22}$$

$$v = lz_1 - 3mz_2 \text{ și } w = lz_2 + mz_1 \tag{23}$$

și ca urmare:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v+w}{2} = \dfrac{l+m}{2} z_1 + \dfrac{l-3m}{2} z_2 \\ y = \dfrac{v-w}{2} = \dfrac{l-m}{2} z_1 - \dfrac{l+3m}{2} z_2 \\ z = z_1^2 + 3z_2^2 \end{cases} \tag{24}$$

z fiind număr impar, z_1 și z_2 sunt de paritate diferită, deci l și m trebue să fie de aceeași paritate, însă în cazul când ambele sunt pare, numerele $\left(\frac{l}{2}\right)$ și $\left(\frac{m}{2}\right)$ să fie de paritate diferită, căci k este număr impar.

Să considerăm cazul:

$$l = 2\alpha + 1, \quad m = 2\beta + 1. \tag{25}$$

Avem în acest caz:

$$\begin{cases} x = (\alpha+\beta+1)z_1 + (\alpha - 3\beta - 1)z_2 \\ y = (\alpha - \beta)z_1 - (\alpha + 3\beta + 2)z_2 \\ z = z_1^2 + 3z_2^2 \\ k = \alpha^2 + 3\beta^2 + \alpha + 3\beta + 1, \end{cases} \tag{26}$$

pentru care valori, relația care dă valoarea lui t devine:

$$t = \frac{[(2\alpha+1)z_1 - 3(2\beta+1)z_2]k + (z_1^2+3z_2^2)^2}{[(\alpha+\beta+1)z_1 + (\alpha-3\beta-1)z_2][(\alpha-\beta)z_1 - (\alpha+3\beta+2)z_2]}. \tag{27}$$

Calculul general îl oprim aci.

Când dăm celor patru parametri α, β, z_1, z_2 valori întregi la întâmplare, valoarea lui t dată de (27) este în general un număr fracționar, însă pentru a avea o soluție este necesar să alegem acești parametri astfel ca valoarea lui t să fie număr întreg. Vom da deci un procedeu însă, cu ajutorul căruia să fie posibil a deduce soluții întregi ale ecuației propuse și valorile întregi corespunzătoare ale lui t.

c. Ne propunem de exemplu să găsim soluțiile prime în care z să aibă valoarea 7. In acest caz, putem lua pentru z_1 și z_2 una din perechile de valori: $(+2, +1); (+2, -1); (-2, +1); (-2, -1)$. Fie de exemplu: $z_1 = +2$, $z_2 = +1$. Avem în acest caz:

$$\begin{cases} x = 3\alpha - \beta + 1; \; y = \alpha - 5\beta - 2; \; z = 7 \\ t - \dfrac{(4\alpha-6\beta-1)(\alpha^2+3\beta^2+\alpha+3\beta+1)+49}{(3\alpha-\beta+1)(\alpha-5\beta-2)}. \end{cases} \tag{28}$$

Fie y al doilea număr pe care să-l determinăm după voie.

Avem în acest caz:

$$\alpha = y + 5\beta + 2,$$

deci

$$x = 7m + 3y, \; y = y, \; z = 7 \tag{29}$$

iar

$$t = \frac{(7m+4y)(7m^2+5my+y^2)+49}{y(7m+3y)} = \frac{49(m^3+1)+63m^2y+7my^2+4y^3}{y(7m+3y)} \tag{30}$$

în care m este număr impar, ce urmează a fi determinat așafel ca valoarea lui t să fie întreagă.

1^0. Soluția în care $y = +1$ este dată de:

$$x = 7m + 3, \; y = +1, \; z = 7,$$

$$t = \frac{(7m+4)(7m^2+5m+1)+49}{7m+3}.$$

Dar

$$7m + 3 = x \quad {}^*_*m = \frac{x-3}{7} \quad {}^*_*x \equiv 3 \pmod 7,$$

iar numărătorul lui t calculat cu această valoare dă

$$N = \frac{1}{7}(x^3 + 344),$$

deci x este necesar divizor de forma de mai sus al numărului *344*. Găsim:

$$x = -4; -172 \quad {}^*_*m = -1; -25,$$

deci soluțiile prime:

$$(-4, +1, +7/-10); (-172, +1+7/+4226).$$

2^0. In acelaşi fel găsim pentru $y = -1$, soluţiile prime:

$(-3, -1, +7/+15)$; $(+18, -1, +7/-49)$;
$(-38, -1, +7/-205)$; $(-171, -1, +7/-4177)$.

3^0. Pentru $y = +2$ soluţiile prime:

$(-1, +2, +7/25)$; $(+27, +2, +7/53)$;
$(+13, +2, +7/+14)$.

4^0. Pentru $y = +15$, avem soluţia primă:

$(+143, +15, +17/+195)$.

d. Pentru valoarea $z = +1$, caz tratat prin alt procedeu de D-l *G Constantinescu* (G. M. XLVI), avem

(31) $x = n - y;\ y = y;\ z = +1;\ t = -3n + \dfrac{n^3+1}{y(n-y)}$.

Se vede că x şi y trebue să fie divizori ai numărului (n^3+1), deci y de exemplu fiind divizor al lui (n^3+1) este prim cu n deci prim cu complementul său $n - y = x$.

Dând pe rând lui n valorile

$2, 3, 4, 5, \ldots 14, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$

găsim soluţiile prime:

$n = 3$: $(+7, -4, +1/-10)$
$n = 5$: $(+3, +2, +1/+6)$; $(+7, -2, +1/-24)$;
$(+14, -9, +1/-16)$
$n = 11$: $(+9, +2, +1/+41)$
$n = +12$: $(+19, -7, +1/-49)$
$n = +14$: $(+9, +5, +1/+19)$
$n = -4$: $(+7, -3, +1/+15)$
$n = -7$: $(+2, -9, +1/-2)$.

(Va urma).

NOTE MATEMATICE

6. — *Solutions paramétriques du système diophantien*

$$a_1^x + a_2^x + a_3^x = b_1^x + b_2^x + b_3^x, (x = 2,4).$$

Dans ma brochure *„Sur les Egalités Multigrades“* j'expose (p 36) un procédé pour obtenir une infinité de solutions du système proposé. Celui-ci revient au suivant:

$$a_1^2 + a_3^2 = b_2^2\ (1);\ b_1^2 + b_3^2 = a_2^2\ (2);\ a_1 a_3 = b_1 b_3\ (3).$$

On peut résoudre ce système moyennant les formules

$$\begin{cases} a_1 = k^2 - l^2;\ a_3 = 2kl;\ b_2 = k^2 + l^2 \\ b_1 = m^2 - n^2;\ b_3 = 2mn;\ a_2 = m^2 + n^2 \end{cases}$$

avec la condition

$$kl(k^2 - l^2) = mn(m^2 - n^2)$$

(cf. loc. cit.)

On obtient une solution plus générale en introduisant dans les formules précédentes deux facteurs de proportionnalité ϱ et σ Nous écrivons

$$\begin{cases} a_1 = \sigma(k^2 - l^2);\ a_3 = 2\sigma kl;\ b_2 = \sigma(k^2 + l^2) \\ b_1 = \varrho(m^2 - n^2);\ b_3 = 2\varrho mn;\ a_2 = \varrho(m^2 + n^2) \end{cases}$$

avec la condition

$$\sigma^2 kl(k^2 - l^2) = \varrho^2 mn(m^2 - n^2).$$

On trouve ainsi les solutions que nons avons réunies dans le tableau ci-aprés:

	k	l	m	n	ϱ	σ
α)	$p^2 + q^2$	$-p^2 + 2q^2$	$p^2 + q^2$	$2p^2 - q^2$	q	p
β)	$p^2 + 2q^2$	$p^2 - q^2$	$2p^2 + q^2$	$p^2 - q^2$	q	p
γ)	$p^4 + 2p^2q^2 + q^2$	$4p^2q^2$	$p^4 + 2p^2q^2 + q^4$	$(p^2 - 3q^2)^2$	$p^2 + 3q^2$	$2(p^2 - 3q^2)$
δ)	p	q	$(p^2 + q^2)^2$	$4pq(p^2 - q^2)$	1	$2(p^2+q^2)(p^2+2pq-q^2)(p^2-2pq-q^2)$
ε)	$p^2 + pq + q^2$	$p^2 - q^2$	$p^2 + pq + q^2$	$2pq + q^2$	1	1

ε) est la solution donnée dans una brochure (loc. cit.).

Exemples numériques

α) $p = 1, q = 1$ $12^x + 29^x + 35^x = 20^x + 21^x + 37^x$
β) $p = 2, q = 3$ $220^x + 459^x + 471^x = 255^x + 396^x + 509^x$
γ) $p = 2, q = 1$ $313^x + 12915^x + 28000^x = 25^x + 312^x + 30835^x$
δ) $p = 1, q = 2$ $210^x + 280^x + 1201^x = 49^x + 350^x + 1200^x$
ε) $p = 2, q = 1$ On retrouve l'exemple sub α).

$\Big\}\ x = 2,4$

A. GLODEN.

7. — *Bemerkung zur Note „Sur une méthode de formation des égalités multigrades* $a_1^p + a_2^p + \cdots = b_1^p + b_2^p + \cdots (p = 1, 3, 5 \ldots, 2n+1)$*“ in der „Rev. Mat.“ Anul XVI, No. 12.*

In der „Rev. Mat.“ Anul XVI, No. 12 gibt *A. Gloden* Identitäten von der Form $a_1^p + a_2^p + \cdots = b_1^p + b_2^p + \cdots (p = 1, 3, 5 \ldots, 2n+1)$. Ich fand nach seiner Methode auch solche Identitäten, wie sie Herr *Gloden* gibt, aber mit *weniger* Gliedern.

a) Es ist $(1, 6, 8, 11, 20, 21, 21, 22, 31, 36, 47, 51, 52, 67, 68, 79, 80, 82, 90, 93, 94, 95, 104, 105)^p = (2, 3, 12, 13, 14, 17, 25, 27, 28, 39, 40, 55, 56, 60, 71, 76, 85, 86, 86, 87, 96, 99, 101, 106)^p (p = 1, 2, 3, \ldots, 11, 12)$.

Daraus folgt die Identität $(3, 5, 13, 35, 45, 63, 65, 65, 67, 85, 91, 95, 105)^p = (27, 29, 51, 53, 57, 73, 79, 81, 83, 101, 103)^p (p = 1, 3, 5, \ldots 11)$ mit 13 Gliedern auf der linken Seite und 11 Gliedern auf der rechten Seite.

b) Es ist $(12, 17, 19, 19, 21, 23, 33, 37, 42, 44, 44, 46, 58, 60, 65)^p = (2, 4, 4, 6, 9, 13, 25, 27, 27, 29, 36, 38, 41, 50, 50, 52, 63, 64)^p (p = 1, 3, 5, \ldots, 11, 13)$ mit 15 Gliedern auf der linken Seite und 18 Gliedern auf der rechten Seite.

A. MOESSNER

---

8. — *Asupra problemei 1392.*

In această problemă se cere să se arată:

$$\sum \frac{\sin A}{1+\sin A+\cos A} - 2\prod \frac{\sin A}{1+\sin A+\cos A} = 1.$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare.

In rândurile ce vor urma voiu căuta să dau o soluție mai simplă problemei.

Și anume, observând că:

$$\frac{\sin A}{1+\sin A+\cos A} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} =$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = sp\frac{A}{2}$$

relația din enunț devine:

$$sp\frac{A}{2} + sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = 1 + 2\,sp\frac{A}{2}\,sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}$$

care-i o relație cunoscută din *Trigonometria patratică*, p. 70.

ENACHESCU GR. ION

BIBLIOGRAFIE

1. Prof. Dr. *I. Curea.* Bulletin séismique, 1944, Timișoara.

2. Dr. Ing. *Remus Răduleț.* Verstärkungszahl von Trioden mit Parallelsteggitter, (Sonderdruck aus dem „Bulletin Scientifique de L'ÉcolePolytehnique de Timișoara“), Band 12, Heft 3—4.

3. Ing. Inspector Silvic *Tiberiu Cernescu.* Contribuțiuni la cunoașterea platanului din Timișoara. (Extras din „Bulletin Sciéntifique de l'École Polytechnique de Timișoara, Tome 11, Fasc. 3—4.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1939. — *Să se rezolve sistemul*

$$x^3 - y = a, \qquad y^3 - x = a.$$

M. GHERMANESCU

Soluție. Dacă scadem aceste două ecuații, membru cu membru, avem

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+1) = 0,$$

care arată că putem avea $x = y$, rădăcini ale ecuației

$$x^3 - x = a, \tag{1}$$

sau $x \neq y$, deci x și y mai verifică ecuația

$$x^2 + xy + y^2 + 1 = 0, \tag{2}$$

cu care vom înlocui una din ecuațiile date. Eliminând pe y între această ecuație și prima din ecuațiile date, obținem ecuația de gradul al șaselea

$$x^6 + x^4 - 2ax^3 + x^3 - ax + a^2 + 1 = 0, \tag{3}$$

ale cărei rădăcini se bucură de o proprietate interesantă, pe care o vom pune imediat în evidență.

In adevăr, ecuațiile date se pot scrie

$$y = x^3 - a = \theta(x), \qquad x = \theta(y) = \theta_2(x), \tag{4}$$

unde $\theta_2 = \theta(\theta)$. Rezultă că rădăcinile ecuației (3) se împart în trei grupe de câte două, unde, în fiecare grup, o rădăcină se obține din cealaltă prin operația θ, adică avem

$$\begin{aligned} x_2 &= \theta(x_1), \quad x_4 = \theta(x_3), \quad x_6 = \theta(x_5). \\ x_1 &= \theta(x_2), \quad x_3 = \theta(x_4), \quad x_5 = \theta(x_6). \end{aligned} \tag{5}$$

Ecuația (3), în care o rădăcină se exprimă rațional în funcție de o alta, este ceia ce se chiamă o *ecuație abeliană*, după numele matematicianului norvegian *Abel* (1802—1829), care a studiat pentru prima oară asemenea ecuații. Un exemplu de asemenea ecuație am mai dat cu ocazia problemelor 3503 și 4645 din *Gazeta Matematică*, v. XLII, p. 310.

Dacă luăm ca necunoscute

$$(6) \qquad u = x_1 + x_2, \quad v = x_3 + x_4, \quad w = x_5 + x_6,$$

u, v, w, vor fi rădăcinile unei ecuații de gradul al treilea în z, ce se obține eliminând x între (3) și

$$(7) \qquad z = x + \theta(x) = x^3 + x - a.$$

Odată determinați u, v, w, vom forma ecuațiile

$$(8) \qquad x^2 - u x + \varphi(u) = 0, \quad x^2 - v x + \varphi(v) = 0,$$
$$x^2 - w x + \varphi(w) = 0,$$

în care se descompune (3) și în care φ se exprimă rațional în funcție de variabila corespunzătoare. In adevăr, avem din (5) și (6),

$$u = x_1 + x_2 = x_1^3 + x_2^3 - 2a =$$
$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3 x_1 x_2] - 2a,$$

deci

$$(9) \qquad x_1 x_2 = \varphi(u) = \frac{u^3 - u - 2a}{3u}.$$

Eliminarea lui x între ecuațiile (3) și (7) o vom face astfel: valoarea lui x^3, scoasă din (7), o introducem în (3) și obținem

$$(\alpha) \qquad x^2 - x z + z^2 + 1 = 0;$$

înmulțim (α) cu x și scadem din (7),

$$(\beta) \qquad z x^2 - z^2 x - z - a = 0;$$

înmulțim (α) cu z și scadem (β); găsim

$$(10) \qquad z^3 + 2z + a = 0,$$

care este rezultatul eliminării.

Rezolvind această ecuație, obținem rădăcinile u, v, w, apoi $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(w)$, date de (9); în fine, rezolvăm ecuațiile (8) și găsim valorile lui x sau y,

$$x_1, y_1 = \theta(x_1) = x_2; \quad x_2, y_2 = \theta(x_2) = x_1;$$
$$x_3, y_3 = \theta(x_3) = x_4, \quad x_4, y_4 = \theta(x_4) = x_3;$$
$$x_5, y_5 = \theta(x_5) = x_6, \quad x_6, y_6 = \theta(x_6) = x_5,$$

împreună cu rădăcinile ecuației (1), care dau

$$x_7 = y_7, \quad x_8 = y_8, \quad x_9 = y_9.$$

Notă. La această problemă, nu s'a primit nici o soluție. Publicăm totuș soluția de mai sus, întrucât asemenea probleme nu s'au mai tratat în această *Revistă* apoi, ea va putea servi ca model celor ce vor încerca problema 4898 din *Gazeta Matematică*, V. XLIII, p. 223, nerezolvată până astăzi, M. G.

Problema 2156 — *Să se determine λ din ecuația*

$$(4\lambda^2 - 2\lambda + 4)x^2 - (5\lambda^2 - 3\lambda - 2)x - \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0,$$

știind că, dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinele, avem relația

$$\operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2(x_1 + x_2)}{5(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 - 3}.$$

Având valoarea lui λ, să se rezolve ecuația dată.

IOAN ANTON

Soluție. Notând

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,tg} x_1 = u, \quad \operatorname{arc\,tg} x_2 = v,$$
$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2(x_1 + x_2)}{5(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 - 3} = z,$$

rezultă

$$(2) \qquad \operatorname{tg} u = x_1, \quad \operatorname{tg} v = x_2,$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{2(x_1 + x_2)}{5(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 - 3}.$$

In virtutea relațiilor (1), relația din enunț devine

$$u + v = z,$$

și luând tangenta în ambii membrii, avem

$$\frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = \operatorname{tg} z.$$

Inlocuind aci $\operatorname{tg} u, \operatorname{tg} v, \operatorname{tg} z$ prin valorile lor din (2), găsim

$$\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{5(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 - 3}.$$

Această ecuație se mai poate scri,

$$\frac{5(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 - 1)}{(1 - x_1 x_2)[5(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 - 3]} = 0.$$

Rezultă de aci

$$(3) \qquad x_1 + x_2 = 0 \qquad \text{și} \qquad (4) \quad x_1 + x_2 = 1.$$

Fiindcă x_1 și x_2 sunt rădăcinele ecuației date, avem

$$x_1 + x_2 = \frac{5\lambda^2 - 3\lambda - 1}{4\lambda^2 - 2\lambda + 4},$$

astfel că relațiile (3) și (4) ne dau

$$(3') \quad 5\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \quad \text{și} \quad (4') \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Rezolvind pe rând aceste ecuaţii, găsim

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{5}, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = -2.$$

Dacă luăm $\lambda = 1$, ecuaţia dată devine $6x^2 = 3$ şi rădăcinele ei sunt,

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dacă luăm $\lambda = -\frac{2}{5}$, ecuaţia dată devine $136x^2 - 124 = 0$, şi rădăcinele ei sunt,

$$x = \pm \sqrt{\frac{31}{34}}.$$

Dacă luăm $\lambda = 3$, ecuaţia dată devine $34x^2 - 34x - 1 = 0$, cu rădăcinele

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{527}}{34}.$$

Dacă luăm $\lambda = -2$, ecuaţia dată devine $2x^2 - 2x - 1 = 0$, şi rădăcinele ei sunt,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Au găsit toate cele 4 valori ale lui λ, d-ra *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara), *Bolcas V.*, *Giligor N. Ion* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Marinescu N.*, *Păläceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Ştefănescu Marin* (Lt., Brăila) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Au găsit pentru λ numai valorile 3 şi -2, d-nii: *Cârnaţiu I. Ion* (lic. Blaj), *Cherdivarencu I* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Enache Ion* (Slt.), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Maliţa A. Mircea* (lic. Beiuş), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Rădulescu V. Nicolae*, *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Soare Simion*, *Stretea I. Alexandru* (Polit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor I. Aurel* (Lic. Făgăraş) şi *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara).

Problema 2161. — *Intr'un triunghiu oricare, în care notaţiile sunt cele obicinuite, să se stabilească relaţia:*

$$a^2 \operatorname{cotg} A \cos^2 B - b^2 \operatorname{cotg} B \cos^2 A = ab \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \sin(A - B).$$

V. ALACI

Soluţie. Ţinând seamă de teorema sinusurilor din care deducem

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}, \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

primul membru al relaţiei din enunţ, se poate scri succesiv, făcând unele simplificări şi având în vedere unele formule cunoscute,

$$a^2 \operatorname{cotg} A \cos^2 B - b^2 \operatorname{cotg} B \cos^2 A =$$

$$a \frac{b \sin A}{\sin B} \operatorname{cotg} A \cos^2 B - b \frac{a \sin B}{\sin A} \operatorname{cotg} B \cos^2 A =$$

$$ab \cos A \cos B \left(\frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos B}{\sin A} \right) =$$

$$ab \cos A \cos B \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin A \sin B} =$$

$$ab \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \sin(A - B).$$

Astfel relaţia din enunţ este stabilită.

Soluţii analoage date de d-ra *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Avram Cristache* (Lic., Brăila), *Boriş V. Bosie* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Ionescu C. Victor Kinsky Ioan* (Timişoara), *Knopf Hermann* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Maliţa A. Mircea* (Lic., Beiuş), *Marinescu N*, *Muţiu S. Antim*, *Pat I Moise* (Polit., Timişoara) *Păläceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Pupezescu Gh. Ion*, *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Stretea Alexandru* (Polit., Timişoara), *Tincu C C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor I. Aurel* (Lic., Făgăraş), *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Observare. O altă soluţie este acea din „R. M. T." [1]) An. XXIII, p. 90.

Problema 2170. — *Să se găsească suma numerelor multiple de 59, cuprinse între 1000 şi 10000.*

PETRE F. IONESCU

Soluţie. Intre 1000 şi 10000, primul număr divizibil prin 59 este 1003,

$$1003 = 59 \times 17,$$

iar ultimul număr divizibil prin 59 este 9971,

$$9971 = 59 \times 169.$$

Suma cerută, pe care să o notăm cu S, este

$$S = 1003 + (1003 + 59) + (1003 + 2 \times 59) + \cdots + (1003 + 152 \times 59).$$

[1]) *V. Alaci.* Relaţiuni remarcabile într'un triunghiu.

Observăm că avem o *progresie aritmetică* cu 153 termeni, primul termen fiind 1003; deci conform formulei care dă suma termenilor unei *progresii aritmetice*, avem

$$S=\frac{(1003+9971)153}{2}=5487\times 153=839511.$$

Soluţii date de d-nii: *Avram Cristache* (Lic., Brăila), *Braşoveanu D. Gheorghe* (Lic., T. Severin), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt,), *Cochela I. Livius* (Lic. Milit., Timişoara), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Costea D. Florian* (Lic. Beiuş), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Enache Ion* (S.-Lt., Giurgiu), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic. Tg.-Jiu), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Goldis T. Gheorghe* (Beiuş), *Lupescu C-tin* (Lt.), *Maliţa A. Mircea* (Lic. Beiuş), *Mazilu Marius* (Lic., Caransebeş), *Miclea Nicolae* (Alba-Iulia), *Pat. I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timlşoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Rogoz N. Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Szabo V. Iuliu* (Polit,, Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic., Loga, Timişoara), *Tulvan Mircea* (Lic., Beiuş), *Tutor Aurel* (Lic., Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara), *Vrânceanu G. Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2172. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$2x^4+2x^3+x^2-2x-1=0$$

C. TINCU

Soluţie. Ecuaţia dată înmulţită cu -1 se mai poate scri

$$(x+1)^2-2x^2(x+1)-2x^4=0,$$

sau

$$\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^2-2\,\frac{x+1}{x^2}-2=0.$$

Avem o ecuaţie de gradul al 2-lea în $\frac{x+1}{x^2}$, pe care rezolvând-o obţinem

$$\frac{x+1}{x^2}=1\pm\sqrt{3}.$$

De aci deducem următoarele două ecuaţii de gradul al 2-lea

$x^2(1+\sqrt{3})-x-1=0$ şi $x^2(1-\sqrt{3})-x-1=0$,

respectiv cu rădăcinele

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2(1+\sqrt{3})},$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{5-4\sqrt{3}}}{2(1-\sqrt{3})}.$$

Soluţii date de d-nii: *Cârnaţiu I. Ioan* (Lic., Blaj), *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timişoara). *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Serengău Mihai* (Lic. Loga, Timişoara), şi *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara).

Problema 2187. — *Să se calculeze suma*

$$\sum_{n=1}^{n}(3n-1)(3n+1)(3n+3).$$

ALEXANDRU ŢIGANOIU.

Soluţie. Dezvoltând calculele, putem scri

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{n}(3n-1)(3n+1)(3n+3)=$$

$$3\sum_{1}^{n}(9n^2-1)(n+1)=3(9S_3+9S_2-S_1-n),$$

unde

$$S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k,\quad (k=1,2,3\ldots).$$

Cum avem cunoscute sumele

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2},\qquad S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

relaţia (1) devine

$$\sum_{n=1}^{n}(3n-1)(3n+1)(3n+3)=$$

$$3\left[\frac{9n^2(n+1)^2}{4}+\frac{9n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-n\right]=$$

$$\frac{3[9n^2(n+1)^2+12n^3+18n^2+6n-2n^2-6n]}{4}=$$

$$\frac{3n^2(9n^2+30n+25)}{4}=\frac{3n^2(3n+5)^2}{4}.$$

Avem astfel calculată suma cerută.

Soluţii date de d-ra *Măran I. Ana* (Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Bolcaş V.* (Lic., Beiuş), *Bossie V. Boriş* (Polit,, Timişoara), *Braşoveanu Gheorghe* (Lic. T. Severin), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea P. Ioan* (Polit., Timişoara), *Goldis T. Gheorghe* (Lic., Beiuş), *Grozescu C Liviu* (Polit., Timişoara), *Ieşan Alexandru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Maliţa A. Mircea* (Lic. Beiuş), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic Milit., Timişoara), *Sabău Gh.* (Polit., Timişoara), *Szabo C Iuliu* (Polit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tulvan V. Mircea* (Lic., Beiuş), *Tutor Aurel* (Lic., Făgăraş) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2225 — Să se găsească un patrat perfect de 6 cifre ştiind să ultimele sale 3 cifre de la dreapta, scrise într'o ordine oare care, dau rădăcina patrată a numărului căutat. De exemplu:

$$177241 = 421^2.$$

G-L GH. BUICLIU

2226. — Ştiind că un număr din textul

$$„2 \cdot \frac{78}{5} \cdot \frac{22}{5} \cdot \frac{26}{5} \cdot 2 \cdot \frac{54}{5} \cdot \frac{98}{5} \cdot \frac{54}{5} : \frac{26}{5} : 2 \cdot \frac{54}{5} : \frac{62}{5} \cdot$$

$$\frac{66}{5} \cdot \frac{82}{5} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{78}{5} \cdot \frac{98}{5}“$$

e dat de relaţia

$$y = \frac{4x+6}{5},$$

unde x reprezintă numărul ce indică locul unei litere în alfabet, se cere să se descifreze textul de mai sus, cifra barată reprezentând o literă mare şi semnul: despărţind două cuvinte.

AL. TIGANOIU

2227. — Să se determină a, b, c, astfel ca polinomul întreg

$$x^p + a x^{p-1} + b x + c, \qquad (p \geqq 5)$$

să se dividă prin $(x-1)^3$ şi în acest caz să se afle câtul.

V. ALACI

2228. — Să se afle adevărata valoare a expresiei

$$z = \frac{3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y - 1}{x^4 + y^3(x+1) + y^2(x^2+x+1) + y(x^3+3x^2+2x+1) - 1},$$

pentru $x = 1$, $y = 0$ soluţii ale ecuaţiei

$$2x^3 + x^2y^2 - 3x^2y + 6xy^2 - y^2 - x^2 + 2xy - 1 = 0,$$

I. C BALAN

2229. — Dreapta OG, unind centrul cercului circumscris cu centrul de greutate a unui triunghiu ABC, întâlneşte laturile BC, CA, AB în α, β, γ. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{\alpha O}}{\overline{\alpha G}} + \frac{\overline{\beta O}}{\overline{\beta G}} + \frac{\overline{\gamma O}}{\overline{\gamma G}} = 3.$$

In un tetraedru ABCD, avem de asemenea

$$\frac{\overline{\alpha O}}{\overline{\alpha G}} + \frac{\overline{\beta O}}{\overline{\beta G}} + \frac{\overline{\gamma O}}{\overline{\gamma G}} + \frac{\overline{\delta O}}{\overline{\delta G}} = 6,$$

O, G fiind centrul sferei circumscrise şi centrul de greutate al tetraedrului.

V. THÉBAULT

2230. — Să se determine toate numerele întregi a, b, c, astfel ca

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{c} = \frac{\pi}{4}.$$

M GHERMANESCU

2231. — In triunghiul dreptunghic ABC se duce înălţimea AA'. Fie A'D şi A'E bisectoarele unghiurilor drepte AA'B şi AA'C, limitate la laturile triunghiului considerat.

Insemnând cu α şi β respectiv unghiurile ADA' şi AEA', să se stabilească relaţia

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{b^2 - c^2}{bc}.$$

LT. MIRCEA GRUMAZESCU

2232. — Să se arate că într'un triunghiu, în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem

$$\sum r_c r_b (r_c + r_b) \operatorname{cotg}^2 \frac{B+C}{2} \cos(B-C) =$$

$$\sum \frac{p^2 b \sin 2A \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{(1-\sin B)\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}.$$

C. C. TINCU

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Calculul Vectorial

de

Dr. Ing. PLAUTIUS ANDRONESCU

Profesor și Rector al Politechnicei din Timișoara.

130 pagini, Lei 500

Se obține prin Laboratorul de Electrotechnică, Politechnica Timișoara, sau prin Librăriile: din București: Cartea Românească, Librăria Tehnicienilor Strada Polizu Nr. 2, Librăria Cioflec Calea Victoriei Nr. 27.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Legându-se colecțiileR. M. T., anii I—XXII, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II—XXIII, cu prețul de lei 400 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

ANUL XXIV. IUNIE 1944 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **G. IUGA:** O PROBLEMA DE ANALIZA NEDETERMINATA. (URMARE).
2. **ALEXANDRU TIGANOIU:** PROGRESII MIXTE.
3. NOTE MATEMATICE 9, 10, 11.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1000, 1001, 2002, 2188.
6. PROBLEME PROPUSE: 2233–2240.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare. educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — NO. 4. TIMISOARA, IUNIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

O PROBLEMĂ DE ANALIZĂ NEDETERMINATĂ.

DE

G. IUGA.

(Urmare).

Cum însă suma rădăcinilor ecuației în V este nulă, ar urma ca suma algebrică formată cu cuburile a trei numere întregi $x_1^3 \pm y_1^3 \pm z_1^3$ să fie nulă. Suntem conduși deci, din nou, la ecuația lui *Fermat*.

11. Să demonstrăm că pentru $t = 5$ există numai soluția completă și simplă $(1, 1, 2, 5)$ dimpreună cu asociatele sale prin permutarea elementelor și soluțiile opuse acestora.

In cazul $t = 5$ avem singura determinare posibilă $t_1 = 2$ și $t_2 = 1$, căci când t_2 este par, se divide cu 4 (§ 5).

Relația (11) dă $l\,m\,n = 49$, deci vom avea două tipuri de ecuații asociate, anume

$$(10_a) \qquad 7x_1^3 + 7y_1^3 + z_1^3 = 11\,x_1\,y_1\,z_1$$

$$(10_b) \qquad x_1^3 + y_1^3 + 49z_1^3 = 11\,x_1\,y_1\,z_1.$$

Aceste ecuații sunt simetrice în raport cu două din cele trei elemente. Aici am ales ca element *nesimetric* pe z_1, ceeace nu restrânge cu nimic valabilitatea raționamentului și concluziunilor noastre și în cazurile când alt element ar fi cel nesimetric, fiind o simplă chestiune de permutare în notația elementelor.

Dacă înmulțim ecuația (10_a) cu 49, se poate pune sub forma

$$(7x_1)^3 + (7y_1)^3 + 49z_1^3 = 11\,(7x_1)(7y_1)\,z_1,$$

ceeace ne arată că oricărei soluții simple $\{x_1, y_1, z_1\}$ a ecuației (10_a) îi corespunde o soluție *simplă* $\{7x_1, 7y_1, z_1\}$ a ecuației (10_b), căci în ecuația (10_a) elementul z_1 nu poate fi divizibil cu 7. In adevăr, în cazul considerat, prima ecuație a sistemului (12) devine $x_2 = 7x_1^2 - 3y_1z_1$, de unde ar urma ca ipoteza divizibilității lui z_1 cu 7 să atragă după sine și divizibilitatea lu x_2 cu același număr, lucru neadmisibil pentru o soluție *simplă* a ecuației (1).

Soluțiile eventuale de forma $\{7x_1, 7y_1, z_1\}$ — de pildă $\{7, 7, 2\}$ — neavând elementele prime între ele *două câte două*, nu pot fi utilizate la soluționarea ecuației (1).

Să arătăm că ecuația (10_b) nu poate avea soluții cu elementele prime între ele două câte două. In adevăr, înmulțind (10_b) cu 7, putem scrie

$$7x_1^3 + 7y_1^3 + (7z_1)^3 = 11\,x_1\,y_1\,(7z_1),$$

adecă am obține ecuația (10_a), în care elementul nesimetric ar fi multiplu de 7, lucru arătat mai sus ca imposibil. De altfel nu e greu de verificat că într'o soluție simplă a ecuației (10_a) nici x_1 (resp. y_1) nu poate fi multiplu de 7.

Conchidem că (10_b) n'are soluții utile rezolvării ecuației (1). Rămâne să cercetăm eventualele soluții ale asociatei (10_a).

In primul rând, (7_a) devine din acest caz

$$(7_b) \qquad \begin{cases} 5x + 3y + 3z = 14x_1^3 \\ 3x + 5y + 3z = 14y_1^3 \\ 3x + 3y + 5z = 2z_1^3. \end{cases}$$

Scăderea primelor două egalități dă $x - y = 7(x_1^3 - y_1^3)$, prin urmare elementele x și y sunt congruente în raport cu modulul 7.

Pentru o mai lesnicioasă exprimare, despărțim numerele nedivizibile cu 7 în două clase. In clasa întâia grupăm toate numerele ale căror cuburi dau restul $+1$, adecă numerele congruente cu 1, cu 2 și cu 4. In clasa a doua intră numerele congruente cu 3, cu 5 și cu 6, ale căror cuburi dau restul -1.

In cele următoare toate congruențele se iau în raport cu modulul 7.

. Ţinând seama că $x \equiv y$, prima egalitate (7_b) dă $z \equiv 2x$ şi, apoi, ultima egalitate $x \equiv z_1^3$. Am văzut că z_1 nu poate fi multiplu de 7, deci putem lua $x \equiv z_1^3 \equiv 1$, adecă putem considera x şi z_1 ca fiind numere de clasa întâia, căci în caz contrar am putea înlocui soluţia cercetată cu *opusa* sa, care ar îndeplini condiţia cerută.

In felul acesta am ajuns la rezultatul, cu caracter general, că o soluţie simplă a ecuaţiei (1) pentru $t = 5$, raportată la forma aleasă pentru ecuaţia asociată (10_a), trebue să aibă în mod necesar expresiile

$$(18) \qquad \begin{aligned} x &= 7\alpha + 1 \\ y &= 7\beta + 1 \\ z &= 7\gamma + 2, \end{aligned}$$

sau opusele acestora, unde excludem cazul $\alpha = \beta$, înlăturând prin aceasta soluţia cunoscută (1, 1, 2, 5).

Constatăm totodată că elementele soluţiei trebue să facă parte din aceeaşi clasă de numere faţă de modulul 7.

Am amintit la § 4 că orice soluţie (x, y, z, t) a ecuaţiei (1) conduce la o nouă soluţie de forma

$$\begin{cases} \xi = x(y^3 - z^3) = x(y - z)(y^2 + yz + z^2) \\ \eta = y(z^3 - x^3) = y(z - x)(x^2 + zx + x^2) \\ \zeta = z(x^3 - y^3) = z(x - y)(x^2 + xy + y^2). \end{cases}$$

Admitem ca cunoscută demonstraţia acestei teoreme.

Noua soluţia poate să fie amplificată, chiar dacă prima este simplă. De pildă, când prima soluţie este impară, atunci noile elemente sunt pare.

In cazul $t = 5$, am văzut că soluţia (18) cuprinde numere din aceeaşi clasă în raport cu 7, urmează ca noile elemente să fie multipli de 7, din cauza diferenţelor de cuburi. In adevăr, introducând valorile (18), obţinem

$$\begin{cases} \xi = 7(7\alpha+1)(7\beta-7\gamma-1)[7(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)+4\beta+5\gamma+1] \\ \eta = 7(7\beta+1)(7\gamma-7\alpha+1)[7(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+5\gamma+4\alpha+1] \\ \zeta = 7(7\gamma+2)(\alpha-\beta)[7^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+7(3\alpha+3\beta)+3]. \end{cases}$$

Însemnând cu ξ', η', ζ' câturile numerelor ξ, η, ζ prin 7, putem scrie congruenţele

$$(19) \qquad \begin{cases} \xi' \equiv -4\beta - 5\gamma - 1 \\ \eta' \equiv 5\gamma + 4\alpha + 1 \\ \zeta' \equiv 6(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Din primele două egalităţi (7_b) deducem

$$(7_c) \qquad \begin{cases} 5\alpha + 3\beta + 3\gamma + 2 = 2x_1^3 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma + 2 = 2y_1^3 \end{cases}$$

şi în urma scăderii acestora $\alpha - \beta = x_1^3 - y_1^3$.

Să presupunem, în primul rând, că x_1 şi y_1 sunt ambele numere din clasa întâia. Atunci $\alpha \equiv \beta$ şi $\eta' \equiv 0$, cu consecinţa $\xi' = \eta' = 0$, căci am văzut mai sus că o soluţie simplă n'are nici un element divizibil cu 7. Dar egalităţile (7_c) dau în cazul de faţă $\gamma \equiv 2\alpha$, cu consecinţa $\eta' \equiv 1$, deci ipoteza noastră referitoare la calitatea numerelor x_1 şi y_1 cade.

Să presupunem, în rândul al doilea, că x_1 şi y_1 sunt ambele de clasa a doua. Atunci iarăşi $\alpha \equiv \beta$ şi $\zeta' \equiv 0$, însă de astădată $\gamma \equiv 2\alpha + 1$, cu consecinţa $\eta' \equiv 6$. Aşadară un nou caz de imposibilitate.

Să luăm, în al treilea rând, x_1 de clasa întâia şi y_1 de a doua. Obţinem $\alpha \equiv \beta + 2$ şi $\gamma \equiv 2\beta - 1$. de unde apoi $\xi' \equiv \eta' \equiv 4$ şi $\zeta' \equiv 5$. Acest rezultat nu concordă cu condiţia stabilită mai sus că cele trei elemente ale soluţiei sunt în mod necesar numere de aceeaşi clasă, această condiţie rămânând în vigoare şi pentru soluţiile eventual amplificate cu un factor de amplificare nedivizibil cu 7.

Simetria ecuaţiei (10_a) ne scuteşte de a mai cerceta, în mod separat, ipoteza a patra, când x_1 este presupus de clasa a doua, iar y_1 de clasa întâia.

În chipul acesta s'a dovedit că pentru $t = 5$ există singura soluţie completă (1, 1, 2, 5) cu permutările şi amplificările sale.

Notă. Pe o cale cu totul deosebită şi mult mai lungă se poate dovedi că pentru $t = -1$ există singura soluţie completă şi simplă (1, 1, — 1, — 1), cu permutările şi amplificările sale.

PROGRESII MIXTE.

DE

ALEXANDRU I. ŢIGĂNOIU.

Numesc *progresii mixte*, progresiile *geometrico-aritmetice* şi *progresitle aritmetico-geometrice*, despre care vom vorbi în cele ce urmează.

I. Progresii geometrico-aritmetice.

Un şir de mai multe numere, în care fiecare se formează din precedentul, înmulţit cu o cantitate

constantă numită raţie geometrică şi la acest produs adunându-se o altă cantitate constantă numită raţie aritmetică, se numeşte *progresie geometrico-aritmetică.*

Simbolul progresiilor geometrico-aritmetice este $\div$ care se pune înainte; între termeni se pune semnul $:$

Primul termen se notează cu a, raţia geometrică cu q, raţia aritmetică cu r, ultimul termen cu l, numărul termenilor cu n, suma termenilor cu S.

Dacă patru din aceste cantităţi sunt cunoscute, se pot afla şi celelalte.

Observări: 1) Dacă $q=1$, progresia e pur aritmetică.

2) Dacă $q=-1$, $r=a$, progresia devine un şir oscilant.

Probleme asupra progresiilor geometrico-aritmetice.

O progresie geometrico-aritmetică, în general o notăm $\div a : b : c : d : \ldots : i : j : k : l$.

Conform definiţiei progresiei geometrico-aritmetice, putem scrie:

$$b=aq+r$$
$$c=bq+r=(aq+r)q+r=aq^2+rq+r=aq^2+(q+1)r$$
$$d=cq+r=q[aq^2+(q+1)r]+r=aq^3+(q^2+q+1)r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l=aq^{n-1}+r(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}),$$

deci

(1) $q>1$: $$\boxed{l=aq^{n-1}+\frac{r(q^{n-1}-1)}{q-1}}$$

(1′) $q<1$: $$\boxed{l=aq^{n-1}+\frac{r(1-q^{n-1})}{1-q}}.$$

Formula primului termen a. Din formula ultimului termen

$$l=aq^{n-1}+r\frac{q^{n-1}-1}{q-1};$$

scăpând de numitori, avem:

$$l(q-1)=a(q-1)q^{n-1}+r(q^{n-1}-1),$$

de unde avem formulele

(2) $$\boxed{a=\frac{l(q-1)-r(q^{n-1}-1)}{(q-1)q^{n-1}}},\ \text{când } q>1$$

(2′) $$\boxed{a=\frac{l(1-q)-r(1-q^{n-1})}{(1-q)q^{n-1}}},\ \text{când } q<1.$$

Formula raţiei aritmetice r.

Din formulele (1) şi (1′), scăpând de numitori şi izolând termenul ce-l conţine pe r, avem:

(3) $$\boxed{r=\frac{(q-1)(l-aq^{n-1})}{q^{n-1}-1}}$$

şi

(3′) $$\boxed{r=\frac{(1-q)(l-aq^{n-1})}{1-q^{n-1}}}.$$

Aflarea raţiei geometrice q.

Desvoltăm formula ultimului termen

$$l(q-1)=a(q-1)q^{n-1}+r(q^{n-1}-1),$$
$$lq-l=aq^n-aq^{n-1}+rq^{n-1}-r$$

(4) $$\boxed{aq^n-(a-r)q^{n-1}-lq+(l-r)=0}.$$

Relaţia (4) este o ecuaţie de gradul n în q, care ni-l dă pe q.

Din cele n valori căpătate pentru q, rezolvând ecuaţia (4), le oprim numai pe cele reale şi spre mai mare uşurinţă, pe cele raţionale.

Aflarea numărului termenilor n.

Reluăm expresia (4) şi izolăm termenii ce-l conţin pe n:

$$aq^n-(a-r)q^{n-1}=lq-l+r,$$
$$q^{n-1}[a(q-1)+r]=l(q-1)+r.$$

Aplicăm logaritmii şi avem formula

(5) $$\boxed{n=\frac{\log[l(q-1)+r]-\log[a(q-1)+r]}{\log q}+1}.$$

Formula sumei termenilor unei progresii geometrico-aritmetice.

$$S=a+b+c+\cdots+j+k+l.$$

Dar

$$b=aq+r;\ c=aq^2+r(q+1)\ldots,\ l=aq^{n-1}+\frac{r(q^{n-1}-1)}{q-1}$$

deci

$$S=a+(aq+r)+aq^2+r(q+1)+aq^3+r(q^2+q+1$$

$$+\cdots+a\,q^{n-1}+\frac{r\,(a^{n-1}-1)}{q-1},$$

$$S=a\,(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+$$

$$r\,[1+(1+q)+(1+q+q^2)+(1+q+q^2+q^3)$$

$$+\cdots+(1+q+q^2+\cdots+q^{a-2})],$$

$$S=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}+r\,[(n-1)+q(n-2)+q^2(n-3)+q^3(n-4)$$

$$+\cdots+2\,q^{n-3}+q^{n-2}]\quad(\alpha).$$

Să dăm sumei din paranteză o expresie mai simplă; pentru aceasta să luăm identitatea

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1=\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Derivăm ambii membri:

$$(n-1)\,x^{n-2}+(n-2)\,x^{n-3}+(n-3)\,x^{n-4}+\cdots+1$$

$$=\frac{n\,x^{n-1}\,(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

$$(n-1)\,x^{n-2}+(n-2)\,x^{n-3}+(n-3)\,x^{n-4}+\cdots+1$$

$$=\frac{(n-1)\,x^n-n\,x^{n-1}+1}{(x-1)^2}\quad(\beta).$$

În expresia β facem $x=\frac{1}{q}$ şi avem

$$\frac{n-1}{q^{n-2}}+\frac{n-2}{q^{n-3}}+\cdots+1=\frac{\frac{n-1}{q^n}-\frac{n}{q^{n-1}}+1}{\left(\frac{1}{q}-1\right)^2},$$

$$\frac{n-1}{q^{n-2}}+\frac{n-2}{q^{n-3}}+\cdots+1=\frac{n-1-n\,q+q^n}{(1-q)^2\,q^{n-2}}.$$

Scăpăm de numitori şi avem

$$(n-1)+(n-2)\,q+(n-3)\,q^2+\cdots+q^{n-2}=$$

$$\frac{q^n+n\,(1-q)-1}{(1-q)^2}.$$

În prima parte avem tocmai expresia din paranteza mare dela (α).

Deci formula sumei este

$$S=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}+\frac{r\,[q^n-(q-1)\,n-1]}{(q-1)^2}.$$

Dând factor comun şi grupând convenabil avem

$$(6)\qquad \boxed{S=\frac{1}{q-1}\left[(q^n-1)\left(a+\frac{r}{q-1}\right)-n\,r\right]}.$$

II Progresii aritmetico-geometrice.

Un şir de mai multe numere, în care fiecare din ele se formează din precedentul adunat cu o cantitate constantă numită raţie aritmetică şi toată această sumă fiind înmulţită cu o cantitate constantă numită raţie geometrică, se numeşte *progresie aritmetico-geometrică*.

Simbolul progresiilor aritmetico-geometrice este $\div$ care se pune înainte şi între termeni se pune semnul $\therefore$

Primul termen este a, raţia aritmetică r, cea geometrică q, numărul termenilor n, ultimul termen l şi suma S.

Dacă se cunosc patru din aceste cantităţi, se pot afla şi celelalte două.

Observare. Când $q=1$, progresia e pur aritmetică.

Probleme asupra progresiilor aritmetico-geometrice.

Formula ultimului termen l.

Avem progresia aritmetico-geometrică

$$\div a\therefore b\therefore c\therefore d\therefore\ldots\therefore i\therefore j\therefore k\therefore l$$

Conform definiţiei putem scrie

$$b=(a+r)\,q=a\,q+r\,q$$

$$c=(b+r)\,q=b\,q+r\,q=(a\,q+r\,q)\,q+$$

$$r\,q=a\,q^2+r\,q^2+r\,q=a\,q^2+r\,q\,(1+q)$$

$$d=(c+r)\,q=a\,q^3+r\,q\,(1+q+q^2$$

. . . . . .

$$l=a\,q^{n-1}+r\,q\,(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}),$$

de unde formula este

$$(1)\qquad \boxed{l=a\,q^{n-1}+\frac{r\,q\,(q^{n-1}-1)}{q-1}}$$

sau

$$(1')\qquad \boxed{l=a\,q^{n-1}+\frac{r\,q\,(1-q^{n-1})}{1-q}}.$$

Formula primului termen a.

Din formula ultimului termen, scăpând de numitori, avem:

$$l(q-1)=a(q-1)q^{n-1}+rq(q^{n-1}-1),$$

de unde

sau

$$(2')\qquad \boxed{a=\frac{l(1-q)-rq(1-q^{n-1})}{(1-q)q^{n-1}}}.$$

Formula raţiei aritmetice r.

Din formula ultimului termen, scăpând de numitori avem:

mitori avem:

$$(3)\qquad \boxed{r=\frac{l(q-1)-a(q-1)q^{n-1}}{q(q^n-1)}},$$

sau

$$(3')\qquad \boxed{r=\frac{l(1-q)-a(1-q)q^{n-1}}{q(1-q^n)}}.$$

Formula raţiei geometrice q.

Reluăm formula ultimului termen:

$$l=aq^{n-1}+\frac{rq(q^{n-1}-1)}{q-1}=aq^{n-1}+\frac{r(q^n-q)}{q-1}.$$

Scăpăm de numitori:

$$l(q-1)=a(q-1)q^{n-1}+r(q^n-q,$$

$$lq-l=aq^n-aq^{n-1}+rq^n-rq,$$

ordonând, avem:

$$(4)\qquad \boxed{(a+r)q^n-aq^{n-1}-q(l+r)+l=0}.$$

Relaţia (4) este o ecuaţie de gradul n în q, ecuaţie ce ni-l dă pe q. Vom păstra pentru q numai valorile reale şi raţionale (pozitive sau negative, întregi sau fracţionare).

Aflarea numărului termenilor n.

Din relaţia (4) avem

$$q^{n-1}(aq+rq-a)=lq+rq-l,$$

$$q^{n-1}=\frac{l(q-1)+rq}{a(q-1)+rq}.$$

$$(5)\qquad \boxed{n=\frac{\log[l(q-1)+rq]-\log[a(q-1)+rq]}{\log q}+1},$$

log a unei progresii aritmetice.

Avem progresia aritmetico-geometrică

$$\div a : b : c : \ldots : j : k : l,$$

$$S=a+b+c+\cdots+j+k+l,$$

$$S=a+(aq+rq)+(aq^2+r\ldots q)+\cdots+$$

$$[aq^{n-1}+rq(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2})],$$

$$S=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+(n-1)rq+$$

$$(n-2)rq^2+(n-3)rq^2+\cdots+2rq^{n-2}+rq^{n-1},$$

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}+rq[(n-1)+(n-2)q+$$

$$(n-3)q^2+\cdots+2q^{n-3}+q^{n-2}].$$

Pentru însumarea din paranteză procedăm absolut la fel ca şi în cazul determinării sumei termenilor unei progresii geometrico-aritmetice (Capitolul I) şi deci avem

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}+\frac{rq[q^n-(q-1)n-1]}{(q-1)^2},$$

sau în definitiv

$$(6)\qquad \boxed{S=\frac{1}{q-1}\left[(q^n-1)\left(a+\frac{rq}{q-1}\right)-nrq\right]}.$$

Observare. O progresie geometrico-aritmetică ... fi socotită ca o ... şi ...

Exemplu:

$$\div 1 : 9 : 33 : 105\ldots$$

este o progresie geometrico-aritmetică cu raţia geometriçă $q=3$ şi cea aritmetică $r=6$.

Ea poate fi şi o progresie aritmetico-geometrică cu raţia aritmetică $r=2$ şi cea geometrică $q=3$.

În adevăr:

$$\div 9=1.3+6;\ 33=9.3+6;\ 105=33.3+6,\ \text{etc...}$$

la îel

$$\div 9=(1+2).3;\ 33=(9+2).3;\ 105=(33+2).3,\ \text{etc...}$$

Pentru a nu se face confuzii, e bine ca să se specifice, când e vorba de exerciţii cu astfel de progresii, una din raţiile ce intervin şi atunci natura progresiei este unică.

Aplicaţii.

La Capitolul I: Progresii geometrico-aritmetice.

1. Progresia geometrico-aritmetică cu

$$r=2,\quad q=-1,\quad a=2$$

este un şir oscilant:

$$\div 2 \div 0 \div 2 \div 0 \div 2 \div \ldots$$

2. Se dau $a=2$; $q=-2$; $r=1$. Se cere: l_5 şi S_5.

Aplicând formulele respective, găsim:

$$S_5=\frac{1}{-2-1}\left[(-2)^5-1\right)\left(2+\frac{1}{-2-1}\right)-5.1.\Big]=$$

$$-\frac{1}{3}\left[(-33)\cdot\frac{5}{3}-5\right]=-\frac{1}{3}(-55-5).$$

$$S_5=-\frac{1}{3}(-60)=+20.\qquad l_5=27.$$

Progresia este:

$$\div 2 \div -3 \div 7 \div -13 \div 27\ldots$$

II. *La Capitolul II: Progresii aritmetico-geometrice.*

1. Se dau: $a=1$, $r=2$, $q=2$; Se cere; l_5 şi S_5.

$$l_5=1.2^4+2.2\frac{2^4-1}{2-1}=16+4(16-1)=16+60,$$

$$l_5=76.$$

$$S_5=\frac{1}{2-1}\left[(2^5-1)\left(1+\frac{4}{2-1}\right)-5.2.2\right]=$$

$$(31)(1+4)-20,$$

$$S_5=5\times 31-20=155-20.$$

$$S_5=135,$$

Progresia este:

$$\div 1 \therefore 6 \therefore 16 \therefore 36 \therefore 76\ldots$$

2. Se dau:

$r=1$; $\quad q=-2$; $\quad l_5=42$. Se cere: a, S_5.

$$a=\frac{42(1+2)+2(1-2^4)}{(1+2).2^4}=\frac{126-30}{48}=\frac{96}{48}=2$$

$$a=2.$$

$$S_5=\frac{1}{-2-1}\left[(-2)^5-1\right)\left(2-\frac{+2}{-2-1}\right)-5.1.(-2)\Big],$$

$$S_5=-\frac{1}{3}\left[(-33)\left(\frac{8}{3}\right)+10\right]=$$

$$-\frac{1}{3}(-88+10)=-\frac{1}{3}(-78),$$

$$S_5=26$$

Progresia este:

$$\div 2 \therefore -6 \therefore 10 \therefore -22 \therefore 42\ldots$$

NOTE MATEMATICE

9. — *Au sujet de la note de M. Moessner.*

„Sur l'état actuel du problème des multigrades", Revista M. T., mars 1944, page 5.

A. Les exemples donnés par Monsieur *Moessner* pour $n=3$ et $n=6$ ne sont pas ceux en nombres minima; ils sont remplacer par les suivants:

$$1,4,4 \overset{2}{=} 2,2,5$$

$$1,4,6,12,14,17 \overset{5}{=} 2,2,9,9,16,16.$$

L'exemple pour $n=10$ contient une faute d'impression; le dernier terme du premier membre est 47502.

B. On peut obtenir des égalités multigrades normales par l'application des théorèmes suivants:

Théorème I. L'égalité multigrade

$$(\alpha)\qquad a_1,a_2,\ldots a_{n+1} \overset{p}{=} b_1,b_2,\ldots b_{n+1}$$

$$(p=2,4\ldots 2n)$$

donne lieu à l'égalité multigrade normale

$$t-a_1,t-a_2,\ldots t-a_{n+1},t+a_1,t+a_2,\ldots t+a_{n+1} \overset{2n+1}{=}$$

$$t-b_1,t-b_2,\ldots t-b_{n+1},t+b_1,t+b_2,\ldots t+b_{n+1},$$

celle-ci étant d'ordre impair.

Un terme et un seul de l'égalité (α) peut être nul sans qu'on cesse d'en déduire une égalité multigrade normale (non triviale) d'ordre $(2n+1)$.

Théorème II. L'égalité multigrade

$$(\beta)\qquad a_1,a_2\ldots a_r \overset{p}{=} b_1,b_2\ldots b_s$$

$$(p=1,3\ldots 2n-1),$$

avec $r+s=2n+1$ donne lieu à l'égalité multigrade normale

$t-a_1, t-a_2, \ldots t-a_r, t+b_1, t+b_2, \ldots t+b_s \overset{2n}{=}$
$t+a_1, t+a_2, \ldots t+a_c, t-b_1, t-b_2, \ldots t-b_s,$

celle-ci étant d'ordre pair.

C. Nous donnerons ci-après les égalités multigrades vraies pour les n premiers degrés pairs ou pour les n premiers degrés impairs desquels on déduit les égalités multigrades normales en nombre minima 1ième jusqu'au 9ième ordre incl.

Egalités du type (α)

$7, 7 \overset{p}{=} 3, 5, 8$ $(p = 2, 4)$
$2, 16, 21, 25 \overset{p}{=} 5, 14, 23, 24$ $(p = 2, 4, 6)$
$12, 11881, 20231, 20885, 23738 \overset{p}{=} 436, 11857, 20449, 20667, 23750$ $(p = 2, 4, 6, 8)$.

Egalités du type (β)

$7, 8 \overset{p}{=} 1, 5, 9$ $(p = 1, 3)$
$24, 33, 51, \overset{p}{=} 7, 13, 38, 50$ $(p = 1, 3, 5)$
$34, 58, 82, 98 \overset{p}{=} 13, 16, 69, 75, 99$ $(p = 1, 3, 5, 7)$.

A. GLODEN.

10. — *Sur les points d'intersection du cercle circonscrit avec les cercles exinscrits.*

Soient (O), (I) et (I_a), (I_b), (I_c) les cercles circonscrits, inscrit et exinscrits, de rayons R, r r_a, r_b, r_c, d'un triangle ABC; Δ_a, Δ_b, Δ_c les axes radicaux du cercle (O) associé à chacun des cercles (I), (I_a), (I_b), (I_c); M_a et N_a, M_b et N_b, M_c et N_c les points d'intersection des deux cercles considérés; Q_a, Q_b, Q_c les pieds bissectrices intérieures.

1. Les droites Δ_a, Δ_b, Δ_c, perpendiculaires à $O I_a$, $O I_b$, $O I_c$ respectivement, forment un triangle $X_a X_b X_c$ dont les sommets sont les centres radicaux des triples de cercles [(O), (I_b), (I_c)], [(O), (I_c), (I_a)], [(O), (I_a), (I_b)], et dont les côtés sont parallèles aux droites $Q_b Q_c$, $Q_c Q_a$, $Q_a Q_b$.

Les triangles $Q_a Q_b Q_c$ *et* $X_a X_b X_c$ *sont inversement homothétiques, le centre d'homothétie étant situé sur la droite* I G *joignant le centre du cercle inscrit au barycentre du triangle* ABC.

En effet, les sommets X_a, X_b, X_c appartiennent aux axes radicaux des cercles (I_b) et (I_c), (I_c) et (I_a), (I_a) et (I_b), c'est-à-dire aux bissectrices intérieures du triangle complémentaire $A_1 B_1 C_1$ du triangle ABC qui sont parallèles à $A Q_a$, $B Q_b$, $C Q_c$. Le centre Ω d'homothétie est donc sur la droite des centres du cercle (I) et du cercle de *Taylor* du triangle $I_a I_b I_c$, c'est-à-dire sur la droite I G.

On obtient d'ailleurs les relations

$$\overline{OP} = \frac{1}{2 d_a} \cdot r_a (2R + r_a), \ldots; \overline{OS} = \left| \frac{1}{d_a} \cdot R\,(R - r_a) \right|^{1)}, \ldots,$$

P, S et d_a étant les projections orthogonales du point O sur Δ_a, $Q_b Q_c$ et la distance $O I_a$, de sorte que les coordonées normales du points Ω, par rapport aux triangles $X_a X_b X_c$ et $Q_a Q_b Q_c$, sont $(2R^2 + r_a^2)$, $(2R^2 + r_b^2)$, $(2R^2 + r_c^2)$.

Lorsque $R = r_a$, [2] $OP = PS = R\sqrt{3}$.

2. Si l'on désigne par x, y, z les angles $O M_a I_a$, $O M_b I_b$, $O M_c I_c$, on obtient aisément

$$\cos x = 1 - \frac{r_a}{2R}, \quad \cos y = 1 - \frac{r_b}{2R}, \quad \cos z = 1 - \frac{r_c}{2R};$$

d'où

$$\cos x + \cos y + \cos z = 1 - \frac{r}{2R}.$$

Les valeurs limites des angles x, y, z dépendent du reste des inégalités évidentes

$$0 < r_a \leq 4R, \quad 0 < r_b \leq 4R, \quad 0 < r_c \leq 4R.$$

Si $r_a = 2R$, [3] $\cos x = 1, x = \frac{\pi}{2}$, et *les cercles* (O) *et* (I_a) *sont orthogonaux.*

Si $r_a = R$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = 60^0$, et *les cercles* (O) *et* (I_a) *se coupent sous un angle de* 60^0.

---

[1]) Cette formule est due à *J. Neuberg, Mathesis*, 1882—111.

[2]) Pour les nombreuses propriètès de ce triangle, voir *V. Thébault, Mathesis* 1922—206, 1923—133 et 1935 (supplément)

[3]) *V. Thébault, Mathesis*, 1935, loc. cit.

3. Enfin, si les droites IM_a et IN_a, IM_b et IN_b, IM_c et IN_c rencontrent le cercle (O) en Y_a et Y'_a, Y_b et Y'_b, Y_c et Y'_c on a

$$I_a Y_a = I_a Y'_b = I_b Y_b = I_b Y'_c = I_c Y_c = I_c Y'_e = 2R;$$

car les puissances des centres I_a, I_b, I_c des cercles exinscrits, par rapport au cercle circonscrit, sont égales à $2Rr_a$, $2Rr_b$, $2Rr_c$.

Si les droites OM_a et OM'_a, par exemple, rencontrent (I_a) en Z_a et Z'_a, on a

$$OZ_a = OZ'_a = [R + r_a)^2 - 2r_a^2] : R,$$

et des relations analogues pour les droites OZ_b et OZ'_b, OZ_c et OZ'_c correspondants à (I_b) et (I_c).

V. THÉBAULT

---

11. — *Asupra tangentelor comune la cercurile descrise pe laturile unui triunghiu ca diametre,*

In legătură cu problema 1741 din R. M. T. dăm aci alte relaţii. In adevăr, cu notaţiile obicinuite, avem :

1^0 $t_a^2 = (p-b)(p-c) = r r_a$; $t_b^2 = (p-a)(p-c) = r r_b$;

$$t_c^2 = (p-a)(p-b) = r r_c.$$

2^0 $$t_a t_b t_c = (p-a)(p-b)(p-c).$$

3^0 $$2S^2 = (a+b+c) t_a t_b t_c.$$

4^0 $$t_a^2 t_b^2 + t_b^2 t_c^2 + t_c^2 t_a^2 = S^2.$$

5^0 $$\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_c^2} = \frac{1}{r^2}.$$

6^0 $$\frac{t_a^2}{r_a^2} + \frac{t_b^2}{r_b^2} + \frac{t_e^2}{r_c^2} = 1.$$

7^0 $$\Sigma t_a^2 \left(\frac{r_b^2}{t_b^2} + \frac{r_c^2}{t_c^2} \right) = r^2.$$

8^0 $$\frac{t_a^2}{r_a} = \frac{t_b^2}{r_b} = \frac{t_c^2}{r_c} = r.$$

9^0 $$\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_c^2} = \frac{3t_a^2}{t_b^2 t_c^2}.$$

10^0 $r t_a^2 (1 + r_a^2) = r_a (r^2 + t_a^4)$; $r t_b^2 (1 + r_b^2) = r_b (r^2 + t_b^4)$;

$$r t_c^2 (1 + r_c^2) = r_c (r^2 + t_c^4).$$

11^0 $$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_c^2} \right) = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{t_c^2} + \frac{1}{t_a^2} \right) =$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} \right) = \frac{1}{t_a t_b t_c}.$$

12^0 $r_a t_a^2 (1+r)^2 = r (r_a + t_a^2)^2$; $r_b t_b^2 (1+r)^2 = r (r_b + t_b^2)^2$;

$$r_c t_c^2 (1+r)^2 = r (r_c + t_c^2)^2.$$

13^0 $$r_a t_a^2 (r_b + t_b^2)^2 = r_b t_b^2 (r_a + t_a^2)^2;$$

$$r_b t_b^2 (r_c + t_c^2)^2 = r_c t_c^2 (r_b + t_b^2)^2;$$

$$r_c t_c^2 (r_a + t_a^2)^2 = r_a t_a^2 (r_c + t_c^2)^2.$$

14^0 $$(t_a^2 + t_b^2)(t_b^2 + t_c^2)(t_c^2 + t_a^2) = a b c t_a t_b t_c.$$

15^0 $$\frac{a t_a^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{b t_b^2}{\sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{c t_c^2}{\sin^2 \frac{C}{2}} = a b c.$$

16^0 $$r t_a^2 - r_a = (r-1)(r_a + t_a^2);$$

$$r t_b^2 - r_b = (r-1)(r_b + t_b^2);$$

$$r t_c^2 - r_c = (r-1)(r_c + t_c^2).$$

17^0 $$(1+bc)^2 t_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} = bc\left(t_a^2 + \sin^2 \frac{A}{2} \right)^2;$$

$$(1+ca)^2 t_b^2 \sin^2 \frac{B}{2} = ca\left(t_b^2 + \sin^2 \frac{B}{2} \right)^2;$$

$$(1+ab)^2 t_c^2 \sin^2 \frac{C}{2} = ab\left(t_c^2 + \sin^2 \frac{C}{2} \right)^2.$$

18^0 $$bc t_a^2 - \sin^2 \frac{A}{2} = (bc-1)\left(t_a^2 + \sin^2 \frac{A}{2} \right);$$

$$ca t_b^2 - \sin^2 \frac{B}{2} = (ca-1)\left(t_b^2 + \sin^2 \frac{B}{2} \right);$$

$$ab t_c^2 - \sin^2 \frac{C}{2} = (ab-1)\left(t_c^2 + \sin^2 \frac{C}{2} \right).$$

19^0 $(1+r^4)(t_a^2 - r_a)^4 = (r-1)^4 (r_a^4 + t_a^8)$;

$(1+r^4)(t_b^2 - r_b)^4 = (r-1)^4 (r_b^4 + t_b^8)$;

$(1+r^4)(t_c^2 - r_c)^4 = (r-1)^4 (r_c^4 + t_c^8)$;

20^0 $$a = \frac{t_a (t_b^2 + t_c^2)}{t_b t_c}; \quad b = \frac{t_b (t_c^2 + t_a^2)}{t_a t_c}; \quad c = \frac{t_c (t_a^2 + t_b^2)}{t_a t_b}.$$

Se poate continua cu exemplificarea dar ne oprim, publicând altele ca probleme propuse. Particularizări interesante se obţin considerând triunghiu de referinţă dreptunghic.

IONEL I. STAMAATE

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*. Anul XLIX, Nr 8, Aprilie 1944. Formule pentru calculul suprafeţelor laterale ale solidelor rezultate din tăierea unui con circular drept cu un plan, de Ing. *O. S. Ianculescu*. Asupra unei clase de identităţi algebrice, de *N T. Donciu* Generalizarea cubicei lui *Darboux*, de *Ioan A. Ilie*. Asupra unor asocieri de linii şi suprafeţe, de *C. Ionescu Bujor*. Concursul Gazetei Matematice. Premiul. Inginer *Alexandru Roşu*, de Ing *I. Chiţulescu, Alexandru Al Roşu* şi Ing *D. Stoica*. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Plautius Andronescu*. Die Elektrizität unter dem Energetischen Gesichtspunkte (Publicaţiile Academiei de Ştiinţe din România, Nr. 14).

3 *Alfred Moessner* u. *Dr. Albert Gloden*. Einige Zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate. (Sonderdruck aus den „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara', Band 11, Heft 3—4).

4. *M. Ghermănescu*: *Trigonometrie plană şi sferică*, carte conţinând 338 pag. şi 136 figuri, apărută în *Biblioteca Gazetei Matematice*, No. XXI, 1944.

Gazeta Matematică încă de mult s'a gândit să pună la dispoziţia cititorilor săi o trigonometrie care să conţină pe lângă materia de liceu, aplicaţiile acesteia în alte domenii ale matematicei. Vinovatul întârzierei apariţiei acestei cărţi este cel care scrie aceste rânduri. In adevăr, cu ocazia scoaterei ediţiei a doua a *Culegerei de Probleme de Trigonometrie* a lui *V. Cristescu*, am fost însărcinat cu scoaterea unei trigonometrii, care să complecteze această culegere, obligaţie pe care nu am dus-o la bun sfârşit din cauza multiplelor obligaţii ce am avut în ultimii ani

De curând D-l Prof. *M. Ghermănescu* şi-a pus servicii le la dispoziţia Gazetei Matematice şi în mai puţin de un an, pune astăzi la îndemâna cititorilor o carte masiv alcătuită cu multe aplicaţii la *Artilerie, Geometria Analitică. Statică, Cinematică, Topografie, Geodezie* şi *Astronomie*. După cum arată titlul, cartea conţine trigonometrie plană şi sferică. Spaţiul nu-mi permite să fac o analiză mai amănunţită a materiei ce o conţine, dar cineva care aruncă o privire asupra tablei de materie vede imediat, că poate fi folosită tot aşa de bine de un începător ca şi de un elev sau student care vrea să atace probleme mai dificile. D-l Prof. *M. Ghermănescu*, care a experimentat acest curs predându-l în parte elevilor Şcoalei de Ofiţeri de Geniu din Bucureşti, pentru a-l face cât mat accesibil începătorilor, l-a presărat cu peste 700 de exerciţii, multe dintre ele având indicaţii pentru soluţie.

Ca unul ce cunosc munca ce trebueşte depusă la scoaterea unei cărţi, aduc omagiile mele autorului, îndemnând publicul şcolăresc să-o citească cât mai mult. Laudele pe care aşi putea să le aduc aci ar putea fi bănuite ca fiind subiective. Ele vor fi aduse în viitor de către cititori, adevăraţii judecători obiectivi ai unei cărţi. Din această direcţie D-l Prof. *M. Ghermănescu* îşi va primi repede satisfacţia şi răsplata cuvenită.

O carte scoasă în timpul războiului este un omagiu celor cari sacrificându-şi timpul şi viaţa pe front, ne dau posibilitatea celor care am rămas acasă de a munci cu creionul. Este totodată o cinste pentru cei care au înţeles acest lucru, şi D-l Prof *M. Ghermănescu* merită această cinstire cu toată prisosinţa.

Gh. Th. Gheorghiu.

5. Prof. *Ioan Curea*. Die Horizontalseismometer der neuen Erdbebenwarte, in Timişoara. (Sonderdruck aus dem „Bulletin Scientifique de L'École Polytehnique de Timişoara", Band 11, Heft 3—4).

6. Général *V. Negrei*. Le dernier théorème de *Fermat* Bucureşti 1944).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1000. — *Fie* M, N, O, P *proiecţiile unui punct de pe diagonala unui dreptunghiu, pe laturi. Să se arate când*[1] *expresiunea*

$$\overline{MN}\cdot\overline{OP}+\overline{NO}\cdot\overline{MP}$$

este constantă.

SUB LT. C. V. COSTACHESCU

Soluţie. Fie S un punct oarecare pe diagonala B D a dreptunghiului A B C D şi M, N, O, P proiecţiile lui S respectiv pe laturile A B, B C, C D, D A ale paralelogramului. Dacă expresiunea din enunţ este constantă, ar trebui ca ea să aibă aceiaşi valoare oricare ar fi S pe pe B D. Să presupunem că S este în punctul I, de întâlnire al diagonalelor A C şi B D. În acest caz avem evident

$$MN=PO=IB \quad \text{şi} \quad MP=ON=IA=IB.$$

Deci, dacă notăm cu c diagonala dreptunghiului expresiunea dată, pentru S în I are valoarea

$$(1)\quad E=\overline{MN}\cdot\overline{OP}+\overline{NO}\cdot\overline{MP}=\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}=\frac{c^2}{2}.$$

Să calculăm valoarea lui E pentru o poziţie oarecare a lui S. Notăm pentru aceasta

$$AB=a;\quad BC=b;\quad BD=AC=c;\quad BS=d.$$

Pe o figură se vede că, ţinând seamă de relaţiile între laturile şi unghiurile unui triunghiu avem

$$\overline{NO}=\sqrt{\overline{MN}^2+\overline{MO}^2-2\overline{MN}\cdot\overline{MO}\cos NMO},$$

$$\overline{MP}=\sqrt{\overline{MN}^2+\overline{PN}^2-2\overline{MN}\cdot\overline{PN}\cos MNP.}$$

Dar avem

$$\overline{MN}=\overline{BS}=d;\quad \overline{PO}=\overline{DS}=c-d;\quad a^2+b^2=c^2$$

şi notând cu θ unghiul $NMO=CBD$,

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{c},$$

$$\cos MNP=\sin DBA=\sin\theta=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{c}.$$

Ducând aceste valori în expresiunile lui $\overline{NO}$ şi $\overline{MP}$ şi scriind relaţia (1) găsim

[1]) In enunţul iniţial de la pag. 36 Vol. XI era cuvântul *că* în loc de *când*.

$$\sqrt{b^2+d^2-\frac{2b^2d}{c}}\sqrt{a^2+d^2-\frac{2a^2d}{c}}+d(c-d)=\frac{c^2}{2}$$

$$\therefore\quad\left(b^2+d^2-\frac{2b^2d}{c}\right)\left(a^2+d^2-\frac{2a^2d}{c}\right)=\left(\frac{c^2}{2}-dc+d^2\right)^2.$$

Dezvoltând, reducând termenii asemeni şi ţinând seamă de

$$a^2+b^2=c^2$$

găsim

$$a^2b^2\left(1-2\frac{d}{c}\right)^2=c^2\left(\frac{c}{2}-d\right)^2$$

$$\therefore\quad ab\left(1-2\frac{d}{c}\right)=\pm c\left(\frac{c}{2}-d\right).$$

Aceste relaţiuni conduc la

$$d=\frac{(2ab+c^2)c}{2(ab+c^2)}=\frac{c}{2}\quad\text{şi}\quad d=\frac{c(2ab-c^2)}{2(2ab-c^2)}=\frac{c}{2},$$

ceiace arată că pentru a avea (1), trebue ca S să se confunde cu punctul I, de întâlnire a diagonalelor dreptunghiului. Prin urmare enunţul aşa cum a fost propus la pag. 36, vol. XI *nu este adevărat.*

Această soluţie a fost dată în August 1931 de D-l *N. N. Mihăileanu*, pe atunci elev la liceul din Constanţa.

In acelaşi timp, D-l *M. D. Motoc* a schimbat enunţul înlocuind expresia E prin

$$\overline{MP}^2+\overline{NO}^2+2\,\overline{MN}\cdot\overline{OP}$$

care este constantă ori care ar fi S.

S-au mai primit trei soluţiuni care arătau, sau mai bine zis, au crezut că arată, că patrulaterul M N O P este înscriptibil şi atunci în virtutea relaţiei lui *Ptolomeu*, valoarea lui E ar fi egală cu produsul $MO\times PN=ab$, ceiace nu este adevărat, patrulaterul M N O P nefiind inscriptibil de cât când S este în I. In adevăr pe figura avem

$$\sphericalangle MNP=\sphericalangle SBM=\sphericalangle BDC=\sphericalangle OPS.$$

Ca patrulaterul M N O P să fie inscriptibil, trebuie ca

$$\sphericalangle MNP=\sphericalangle MOP$$

ceiace, din relaţia precedentă atrage

$$\sphericalangle OPS=\sphericalangle SOP$$

$$\therefore\quad SO=SP$$

adică S la mijlocul lui B D. G-l G. B.

Problema 1001. — *Intersecţia bisectoarelor unghiurilor unui paralelogram* A B C D *formează un patrulater. Să se arată că:*

1°. *Acest patrulater este un dreptunghiu.*

2°. *Diagonalele lui sunt concurente cu diagonalele paralelogramului dat şi paralele respectiv cu laturile acestui paralelogram.*

I. MARGINEANU.

Soluţie. Fie E, F, G, H intersecţiile bisectoarelor interioare ale unghiurilor paralelogramului, notate ca în figură. Notăm cu O intersecţia diagonalelor E G, F H şi cu A′ intersecţia laturei D C cu bisectoarea unghiului din A.

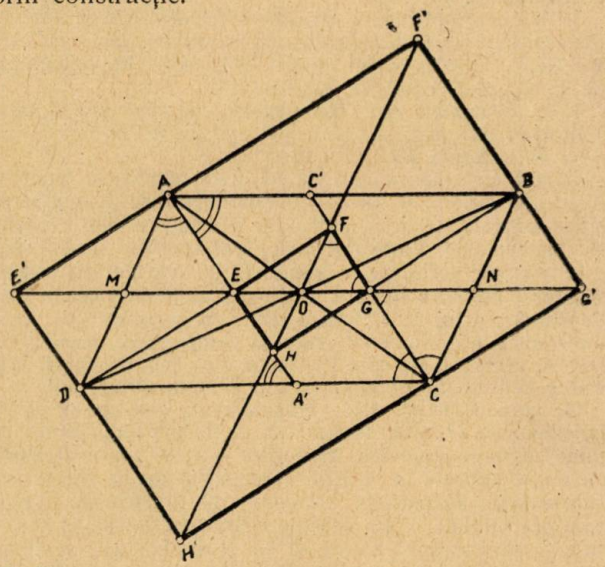
1°. Se vede că

$$\sphericalangle A'AB=\sphericalangle AA'D$$

ca alterne interne şi

$$\sphericalangle A'AB=\sphericalangle A'AD$$

prin construcţie.



Deci

$$\sphericalangle A'AD=\sphericalangle AA'D.$$

Triunghiul A D A′ este isoscel şi prin urmare bisectoarea unghiului D este perpendiculară pe A A′, bisectoare a unghiului A. La fel se arată că B G este perpendiculară pe C G. Cum B G ∥ D E ca bisectoarea ale unghiurilor B şi D, cu laturile paralele şi la fel orientate, figura E F G H este dreptunghiu.

2°. Triunghiul A D A′ fiind isoscel, punctul E este la mijlocul lui A A′. La fel G este mijlocul lui B B′, deci E G este paralelă cu A B, D C şi trece prin mijloacele diagonalelor A C, B D şi a laturilor A D, B C.

Pe figură se vede că A A′ C C′ este paralelogram, deci

$$AC'=A'C',$$

de unde

$$BC'=DA'.$$

Dar

$$GN=\frac{BC'}{2}\quad\text{şi}\quad EM=\frac{DA'}{2}$$

şi comparând cu precedenta

$$GN = EM,$$

ceiace arată că O, mijlocul lui E G, este şi centrul paralelogramului dat.

Triunghiurile F O G şi G N C sunt isoscele, după cele demonstrate anterior. Cum

$$\sphericalangle FGO = \sphericalangle NGC$$

ca opuse la creştet, iar

$$\sphericalangle NGC = \sphericalangle GCD = \sphericalangle NCG$$

ca alterne-interne şi prin construcţie, rezultă

$$\sphericalangle OFG = \sphericalangle GCD = \sphericalangle NCG,$$

ceiace arată că F H este paralelă cu B C.

Notă. 1°. În enunţul de la pag. 36, Vol. XI se cerea încă: *Să se găsească valoarea maximă şi minimă a dreptunghiului astfel format.*

Am suprimat această parte, care nu are sens, de cât dacă se dau anume condiţii de variaţie a paralelogramului.

2°. Au dat soluţii bune d-nii: *Boeriu Val., Coandă I. V., Constantin Petre, Damian T. I., Ivănescu C., Margulius M, Mereuţă Em.. Mihăileanu N. N., Motoc D. M., Păsculescu V., Predoescu I. M., Rusu D. C., Savovici Fl.* şi *Süli M*

3°. D-l *Predoescu M* scrie că problema aceasta se găseşte în *Geometria Plană* de *I. Tutuc*, pentru clasa V reală, sub următorul enunţ: *„Bisectoarele unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghiu, ale cărui diagonale sunt paralele cu laturile paralelogramului şi egale cu laturile lui adiacente."*

4°. Daca $a > b$ sunt laturile paralelogramului, iar S_1 suprafaţa dreptunghiului E F G H, atunci se găseşte uşor

$$S_1 = \frac{(a-b)^2}{2} \sin B = \frac{(a-b)^2}{2} \sin C.$$

Făcând să varieze B, se găseşte

$$S_{max} = \frac{(a-b)^2}{2}$$

când $B = \frac{\pi}{2}$. Apoi

$$S_{min} = 0,$$

când $a = b$, sau când $B = 0$ şi în acest caz paralelogramul este redus la o dreaptă.

5°. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor paralelogramului formează un dreptunghiu E′ F′ G′ H′ ale cărui diagonale trec prin vârfurile dreptunghiului E F G H şi prin O şi a cărui suprafaţa S_2 este

$$S_2 = \frac{(a+b)^2}{2} \sin B = \frac{(a+b)^2}{2} \sin C.$$

6°. Punctul 2° din enunţul problemei 1001 se poate generaliza în felul următor: *Se dă paralelogramul* A B C D *şi se construeşte un alt paralelogram* P *ale cărui laturi trec prin* A, B, C, D, (de exemplu paralelogramul E′ F′ G′ H′ din figura precedentă). *Să se arate că toate aceste paralelograme* P *au centrul în centrul paralelogramului iniţial.*

Demonstraţia e foarte simplă. Pe figură se vede că

$$\sphericalangle E'AD = \sphericalangle BCG' \quad \text{şi} \quad \sphericalangle E'DA = \sphericalangle CBG',$$

pentru că au laturile paralele şi de sensuri opuse. Apoi A D = B C prin construcţie. Deci triunghiurile A D E′ şi B C G′ sunt egale, de unde

$$AE' = CG' \quad \text{şi} \quad DE' = BG'.$$

Figura A E′ C G′ este un paralelogram, având laturi opuse paralele şi egale. Diagonalele E′ G′, A C se întâlnesc deci în mijlocul lui A C, ceiace demonstrează teorema generală. G-l Gh. B.

Problema 2002. — *Să se găsească un număr de patru cifre, din care, scăzând numărul format de primele trei cifre, să obţinem produsul dintre ultima cifră şi numărul de trei cifre format din primul prin suprimarea cifrei sutelor.*

M Ghermanescu

Soluţie. Fie

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

numărul căutat; după enunţ, avem

$$1000a + 100b + 10c + d - (100a + 10b + c) = d(100a + 10c + d),$$

care se mai scrie, după unele transformări

$$(9-d)(100a + 10b + c) = d(9c - 10b + d - 1).$$

În această egalitate, primul membru este nul sau mai mare ca 100, pe când al doilea este nul sau mai mic ca 100; rezultă deci că egalitatea nu poate avea loc decât dacă fiecare membru este separat nul, ceiace conduce la

$$d = 9, \quad 9c = 10b - 8.$$

Ultima se mai poate scrie

$$9(c - b + 1) = b + 1.$$

Membrul al doilea este pozitiv şi mai mic ca 10; rezultă că egalitatea nu poate avea loc decât dacă

$$b + 1 = 9, \quad c - b + 1 = 1$$

care dă $b = 8$, $c = 8$.

Deci soluţiile problemei sunt toate numerele de forma $a889$, unde $a = 1, 2, \ldots, 9$.

Notă. 1°. Soluţii mai îngrijite sub raportul raţionamentului, dar totuş, mult depărtate de cea de mai sus, au dat d-nii *C. Chiriac, G. Creţa* şi *E. Şipoş.* 2°. D-nii *I. Godea* şi *H. Martin* au găsit numai soluţia 1889, pe când Dl *L. Grozescu* a găsit soluţia 2889. M. G.

Problema 2188 [1]. — *Să se stabilească relaţia*

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)} = \operatorname{cotg}(\theta - 45^0),$$

[1]) Enunţ rectificat.

știind că α, β, γ *sunt rădăcinele ecuației*

$$x^3 - (\sin\theta)x^2 + (\cos\theta)x - \operatorname{tg}\theta = 0.$$

VASILE N. FASIE

Soluție. Insemnăm cu E primul membru al relației date și efectuând înmulțirile, avem

$$(1) \qquad E = \frac{\alpha\beta\gamma + \Sigma\alpha\beta + \Sigma\alpha + 1}{\alpha\beta\gamma - \Sigma\alpha\beta + \Sigma\alpha - 1}.$$

Cum α, β, γ sunt rădăcinele ecuației din enunț, în virtutea relațiilor cunoscute între rădăcinele și coeficienții unei ecuații, putem scrie

$$\Sigma\alpha = \sin\theta, \quad \Sigma\alpha\beta = \cos\theta, \quad \alpha\beta\gamma = \operatorname{tg}\theta,$$

astfel că relația (1) devine succesiv

$$E = \frac{\operatorname{tg}\theta + \cos\theta + \sin\theta + 1}{\operatorname{tg}\theta - \cos\theta + \sin\theta - 1} =$$

$$\frac{\sin\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta - \cos\theta} =$$

$$\frac{\sin\theta(1+\cos\theta) + \cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta) - \cos\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} =$$

$$\frac{\sin\theta + \sin(90^0 - \theta)}{\sin\theta - \sin(90^0 - \theta)} = \frac{2\sin 45^0(\theta - 45^0)}{2\sin(\theta - 45^0)\cos 45^0} = \operatorname{cotg}(\theta - 45^0).$$

Relația cerută este astfel stabilită.

Soluții bune date de d-nii: *Brașoveanu Gheorghe* (Lic. T.-Severin), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Filimon Ioan* (Lic. Mihai Viteazul, Timișoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timișoara), *Godea Ioan* (Polit, Timișoara), *Grozescu C. Liviu* (Polit., Timișoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timișoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic Milit., Timișoara), *Pop Emil* (Polit., Timișoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timișoara), *Szabo Iuliu* (Polit., Timișoara), *Tutor Aurel* (Lic., Făgăraș), *Tigănoiu I. Alexandru* (Polit, Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

PROBLEME PROPUSE

2233. — Să se găsească un patrat de patru cifre, știind că este egal cu suma a două numere — unul de trei cifre și celălalt de patru cifre, ambele fiind în același timp patrate și cuburi perfecte — minus un număr de două cifre, care e în același timp patrat și cub perfect.

LUCIAN MUNTEANU

2234. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, $abcde$, astfel ca ab, bc și e să fie patrate perfecte.

GH. CICIREAN

2235. — Se dau relațiile de recurență

$$\begin{cases} a_{2k} = \dfrac{a_k^2 - b_k^2}{C_{2k}^k} \\ a_{2k+1} = \dfrac{a_k a_{k+1} - b_k b_{k+1}}{C_{2k+1}^k} \end{cases}, \quad \begin{cases} b_{2k} = \dfrac{2a_k b_k}{C_{2k}^k} \\ b_{2k+1} = \dfrac{a_k b_{k+1} + a_{k+1} b_k}{C_{2k+1}^k} \end{cases},$$

valabile pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, p$.

Se cere să se calculeze a_p, b_p $(p = 1, 2, \ldots)$ în funcție de a și b, unde am notat $a_1 \equiv a$, $b_1 \equiv b$.

(C_m^n înseamnă obicinuit, combinări de m obiecte luate câte n.)

V. ALACI

2236. — Să se determine a și b astfel ca ecuația

$$x^4 + ax^3 - 8x + b = 0$$

să admită două rădăcini duble. În urmă să se rezolve ecuația. LT. MIRCEA GRUMAZESCU

2237. — Să se determine a, astfel ca să existe relația

$$(S_3 + S_1)(S_4 - 3S_2) = (S_4 + S_2)(S_3 - aS_1),$$

unde

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p.$$

AL. TIGANOIU

2228. — Să se găsească funcția cea mai generală $\varphi(x, y, z, t)$, care satisface ecuației

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(z, t, x, y).$$

M. GHERMANESCU

2239. — Pe înălțimele triunghiului ABC, se iau, de la vârfuri spre laturi, lungimele AA', BB', CC' egale cu raza cercului I înscris triunghiului și lungimile AA'', BB'', CC'' egale cu diametrul aceluiași cerc. Fie F punctul lui *Feuerbach* al triunghiului ABC.

Să se demonstreze că paralele din A'', B'', C'' la $A'F$, $B'F$, $C'F$ sunt concurente și întâlnesc laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare.

G-L GH. BUICLIU

2240. — Să se demonstreze că în orice triunghiu avem relațiile

$$cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B+C}{4} + cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C+A}{4} + cp\frac{C}{4}\,cp\frac{A+B}{4} = \frac{3}{2},$$

$$8\,cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4} = Sp\frac{A+B}{4}\,Sp\frac{B+C}{4}\,Sp\frac{C+A}{4}.$$

MARCEL D COTARIU

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Anton Ioan (P; 2107, 2174 2180, 2183, 2187, 2188, 2189, 2191, 2192, 2193, 2196, 2198, 2199, 2203, 2204, 2207, 2208, 2210, 2113, 2214, 2216); **Birănaș Ioan** (P; 2115, 2175, 2196, 2220, 2223, 2226); **Bogza M.** (1751, 2226, 2231); **Bolcaș V.** (2023, 2115, 2118, 2120, 2121, 2129 2135, 2150, 2151, 2157, 2182, 2183, 2185, 2186, 2188, 2192, 2199, 2203, 2207, 2210). **Brasoveanu Gheorghe** (P. 2160, 2163, 2178, 2181, 2192, 2196, 2198, 2217); **Chiriac C-tin** (N; 1393, 1571, 1697, 1698, 1882, 1906, 2114, 2122, 2132, 2135, 2137, 2144, 2146, 2154, 2160, 2197); **Costea Florian** (2115, 2129, 2130, 2164, 2190, 2202, 2203, 2207, 2210, 2213, 2217, 2226); **Dobrescu Eugen** (A.); **Dumitrescu I.** (2196, 2213, 2226). **Enache Ion** (P; 2217); **Godea Ioan** (2129, 2190, 2202, 2207, 2210, 2214, 2216, 2226); **Groza Liviu** (2196, 2211, 2213, 2217, 2219, 2226); **Iosifescu Cicerone** (2164, 2182, 2183, 2207, 2213); **Mahrenholz Johannes** (2214, 2215, 2216); **Maliţa Mircea** (2134, 2157, 2176, 2182, 2186, 2207, 2210, 2213, 2216); **Măran Ana** (2120, 2138, 2151, 2154, 2160, 2171, 2173, 2178, 2203, 2207, 2209, 2212, 2213, 2217, 2218, 2221, 2225, 2226, 2228); **Miclea Nicolae** (2132, 2139, 2172, 2173, 2174, 2190, 2202, 2207, 2210, 2213). **Munteanu Lucian** (P.); **Plângu Ion** (2210); **Simeso Carol** (P; 2157, 2160, 2226); **Stanciu Petru** (1957, 2018, 2063, 2107, 2111, 2115, 2135, 2151, 2209, 2210, 2213, 2214, 2216, 2218, 2226, 2227); **Thébault V.** (N.); **Tabacu Marin** (2178, 2226); **Tincu C-tin** (P; 1833, 1917, 1922, 1935, 2946, 1949, 1955, 1956, 1964, 1978, 1979, 1995, 2002, 2003, 2010, 2015, 2072, 2137, 2152, 2154, 2173, 2174, 2176, 2202, 2208, 2209, 2214, 2216, 2218, 2220, 2226 2228); **Wegener Eugen** (P; 1370, 1532, 1575, 1822, 1882, 2080, 2131, 2154 2172, 2195, 2197, 2203, 2214, 2216).

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Calculul Vectorial

de

Dr. Ing. PLAUȚIUS ANDRONESCU

Profesor și Rector al Politechnicei din Timișoara.

130 pagini, Lei 500

Se obține prin Laboratorul de Electrotechnică, Politechnica Timișoara, sau prin Librăriile: din București: Cartea Românească, Librăria Technicienilor Strada Polizu Nr. 2, Librăria Cioflec Calea Victoriei Nr. 27.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Legându-se colecțiileR. M. T., anii I—XXII, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II—XXIII, cu prețul de lei 400 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie, scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

ANUL XX V. IULIE 1944 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **G. CALUGAREANU:** OBSERVARI ASUPRA NUMERELOR PRIME.

2. NOTE MATEMATICE 12, 13, 14.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 2079, 2106, 2107, 2109. 2115, 2146, 2175. 2181.

5. PROBLEME PROPUSE: 2241–2248.

6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 5. TIMISOARA, IULIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

OBSERVĂRI ASUPRA NUMERELOR PRIME [1]

DE

G. CĂLUGĂREANU
(TIMIȘOARA).

După *Ed. Lucas* (Théorie des nombres), cele dintâiu probleme care se pun asupra numerelor prime sunt următoarele:

1. Cunoscând primele n numere prime să se determine numărul prim următor.

2. Cunoscând primele n numere prime să se găsească un număr prim mai mare decât ele.

Observările ce urmează pot fi puse în legătură cu aceste două probleme care până astăzi nu au fost rezolvite.

Să notăm cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primele n numere prime, începând cu $p_1 = 2$, aşezate în ordine crescătoare. Să formăm numărul

$$M = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

unde exponenții α_k sunt întregi şi pozitivi, dealtfel oarecare. Să desfacem acest produs în doi factori fără divizori comuni, pe care îi vom scrie

$$p_a^{\alpha} p_b^{\beta} \ldots p_l^{\lambda} \quad \text{şi} \quad p_m^{\mu} p_n^{\nu} \ldots p_s^{\sigma}.$$

Cu aceşti doi factori să formăm numerele

$$N = p_a^{\alpha} p_b^{\beta} \ldots p_l^{\lambda} - p_m^{\mu} p_n^{\nu} \ldots p_s^{\sigma},$$

$$N' = p_a^{\alpha} p_b^{\beta} \ldots p_l^{\lambda} + p_m^{\mu} p_n^{\nu} \ldots p_s^{\sigma}.$$

Deoarece $p_k^{\alpha_k}$ figurează într'unul din cele două produse, si numai într'unul se vede că N şi N′ nu se divid cu niciunul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Deci N şi N′ nu admit decât factori primi $> p_n$, numărul N putându-se reduce şi la ± 1. Se vede deasemeni că factorii primi ai lui N sunt diferiți de acei ai lui N′, căci dacă N şi N′ s'ar divide cu p_{n+k} şi $N + N' = 2 p_a^{\alpha} p_b^{\beta} \ldots p_l^{\lambda}$ s'ar divide cu p_{n+k}, ceeace e imposibil.

Ne vom ocupa îndeosebi de N care ne poate permite să determinăm numere prime $> p_n$, dacă avem grijă să alegem distribuția factorilor din cele două produse, precum şi exponenții, astfel ca N să fie cât mai mic.

În adevăr, dacă $N < (p_n + 2)^2$, suntem siguri că N e prim sau egal cu ± 1, căci numărul prim $p_{n+1} \geq p_n + 2$.

Putem deci răspunde la problema 2. dacă reuşim să distribuim convenabil factorii lui M între cele două produse din N, şi să alegem convenabil exponenții arbitrari, aşa ca să avem $N < (p_n + 2)^2$.

Această nouă problemă poate lua altă formă. Să notăm

$$A = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}, \quad \text{unde} \quad \beta_k = \alpha_k, \text{ sau } 0.$$

Deci A este unul din cele două produse care formează pe N. Trebue să avem atunci, pentruca N să fie prim $> p_n$,

$$1 < N = A - \frac{M}{A} < (p_n + 2)^2,$$

sau

$$A^2 - (p_n + 2)^2 A - M < 0,$$

$$A^2 - A - M > 0.$$

Aceste inegalități ne dau

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4M+1}) \leq A < \frac{1}{2}\left[(p_n+2)^2 + \sqrt{4M + (p_n+2)^4}\right]$$

şi putem lua

$$(1) \qquad \sqrt{M} + 1 \leq A \leq \sqrt{M} + \frac{1}{2}(p_n + 2)^2,$$

căci $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, iar $(p_n + 2)^4$ este neglijabil față de 4M dacă n e destul de mare. Pentru a

[1] Comunicare făcută la Săptămâna matematică a Facultății de Ştiințe Cluj-Timişoara, 17 Iunie 1944.

obţine deci numere prime $> p_n$, vom forma cu factorii lui M, luaţi cu exponenţii pe care îi au în M, produse A, şi vom alege aceşti factori astfel ca (1) să fie verificată. Atunci

$$N = A - \frac{M}{A}$$

ne dă tot atâtea numere prime $> p_n$.

Exponenţii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fiind aceiaşi odată cu M, se vede că se pot forma C_n^k produse A conţinând k factori primi diferiţi, cu exponenţii lor din M. Pentru a obţine toate numerele N distincte, avem de format $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{\frac{n}{2}}$ produse A, când n e par, şi $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + \frac{1}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}}$ produse A când n e impar. Se calculează uşor această sumă şi se constată că avem astfel $2^{n-1} - 1$ produse A distincte. Dintre ele nu satisfac (1) decât cele vecine cu $\sqrt{M}$, şi numai acelea dau sigur numere N prime. Totuşi se constată că şi atunci când (1) nu e satisfăcută, se obţin în acest mod foarte multe numere prime, şi relativ puţine numere compuse.

În cazul $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$, avem $M = p_1 p_2 \ldots p_n$. Pentru a obţine numere N cât mai mici va trebui să luăm cam acelaş număr de factori în A şi $\frac{M}{A}$. Ne vom limita deci la combinările câte $E\left(\frac{n}{2}\right)$ ale celor n factori $p_1, \ldots, p_n$. Iată un exemplu, $n = 5$. Avem $M = 2.3.5.7.11 = 2310$, $\sqrt{M} = 49$, $(p_n+2)^2 = 169$, deci $50 < A < 134$. Obţinem numere prime pentru $N < 169$:

$A = 5.11$, $N = 5.11 - 2.3.7 = 13$,
$A = 2.3.11$, $N = 2.3.11 - 5.7 = 31$,
$A = 2.5.7$, $N = 2.5.7 - 3.11 = 37$,
$A = 7.11$, $N = 7.11 - 2.3.5 = 47$,
$A = 3.5.11$, $N = 3.5.7 - 2.11 = 83$,
$A = 2.5.11$, $N = 2.5.11 - 3.7 = 89$,
$A = 2.7.11$, $N = 2.7.11 - 3.5 = 139$,
$A = 3.5.11$, $N = 3.5.11 - 2.7 = 151$,

dar şi pentru $A = 2.3.5.7$ obţinem un număr prim $N = 199$, cu toate că acest $N > 169$.

Este remarcabil că şi 13, adică numărul prim următor lui 11, se obţine în acest mod. Găsim deasemenea, pentru $n = 6$,

$$17 = 2.7.13 - 3.5.11,$$

însă rezultatul acesta nu e general, căci 19 nu se poate exprima fără exponenţi sub o formă analoagă, utilizând toţi factorii primi mai mici ca 19 Dar avem

$$19 = 2^2.3.5.17 - 7.11.13.$$

Posibilitatea de a obţine $N = \pm 1$ este ilustrată prin exemplele

$$1 = 3.5 - 2.7, \quad 1 = 5.11.13 - 2.3.7.17.$$

Cum se vede, problema 2. ne conduce la următoarea:

Cu factorii lui M, luaţi cu exponenţii lor, să se formeze un produs A cuprins între $\sqrt{M} + 1$ şi $\sqrt{M} + \frac{1}{2}(p_n + 2)^2$.

Putem obţine soluţii ale acestei probleme prin tatonări, în modul următor: cu factorii lui M formăm produse A din ce în ce mai mari, luând întâi doi factori, apoi trei, etc., începând cu factorii cei mai mari. Ne oprim când am depăşit $\sqrt{M}+1$. Dacă în acelaş timp am depăşit şi $\sqrt{M}+\frac{1}{2}(p_n+2)^2$, micşorăm numărul A înlocuind unul din factorii săi printr'un produs de factori încă neutilizaţi, acest produs având o valoare cât mai vecină cu factorul înlocuit. Ca exemplu, fie $n = 8$,

$$M = 2.3.5.7.11.13.17.19 = 9699690,$$

$$\sqrt{M} = 3114, \quad (19+2)^2 = 441.$$

Deci $3115 < A < 3341$. Avem $19.17 = 323 < 3115$, apoi $19.17.13 = 4199 > 3341$. Pentru a micşora acest produs înlocuim pe 17 prin $3.5 = 15$. Avem $3.5.13.19 = 3705 > 3341$. Dacă înlocuim aci pe 3.5 cu $2.7 = 14$ găsim $2.7.13.19 = 3458 > 3341$. Să înlocuim deci în 19.17.13 pe 19 cu $3.5 = 15$. Avem $3.5.13.17 = 3315$ care este în intervalul dorit. Deci $N = 3.5.13.17 - 2.7.11.19 = 3315 - 2926 = 389$ este un număr prim.

Rămâne de văzut dacă nu există un procedeu regulat pentru a construi soluţiile acestei probleme, care să demonstreze în acelaş timp şi existenţa lor în general. În acel caz problema 2. ar fi rezolvită.

NOTE MATEMATICE

12. — *Curiosités arithmétiques.*

Depuis plus de trente ans nous nous sommes occupé de rechercher des carrés et des cubes dont l'écriture ou les propriétés en faisaient des nombres curieux. D'autres se sont aussi attachés à ce sujet qui, dirigé vers les systèmes de numération à base quelconque, forme un chapitre fort intéressant de la théorie des nombres. Nous ne connaissons pas, en effet, de questions qui conduisent plus directement à la recherche de factorisations ou qui s'appuient plus intimement sur la théorie des nombres premiers, des résidus quadratiques, etc. À titre d'exemples, voici, pour les jeunes lecteurs, une liste de carrés et de cubes curieux qui apparaissent dans les tables suivantes des factorisations des nombres entiers $B+1$ et B^2+1 compris entre 1 et 100.

1. *Factorisations de* $B+1$ *et* B^2+1. $(1 \leq B \leq 99)$.

B	B+1	B^2+1	B	B+1	B^2+1
1	2	2	31	2^5	2.13.37
2	3	5	32	3.11	5^2.41
3	2^2	2 5	33	2.17	2 5.109
4	5	17	34	5.7	13.89
5	2.3	2.13	35	$2^2.3^2$	2.613
6	7	37	36	37	1297
7	2^3	2.5^2	37	2.19	2.5.137
8	3^2	5.13	38	3.13	5.17^2
9	2.5	2 41	39	$2^3.5$	2.761
10	11	101	40	41	1601
11	$2^2.3$	2.61	41	2.3.7	2 29^2
12	13	5.29	42	43	5.353
13	2.7	2.5.17	43	$2^2.11$	2 5^2.37
14	3.5	197	44	$3^2.5$	13.149
15	2^4	2.113	45	2.23	2.1013
16	17	257	46	47	29.73
17	2.3^2	2.5.29	47	$2^4.3$	2.5.13.17
18	19	5^2.13	48	7^2	5.461
19	2^2 5	2.181	49	2.5^2	2.1201
20	3.7	401	50	3.17	41.61
21	2.11	2.13.17	51	2^2.13	2.1301
22	23	5.97	52	53	5.541
23	$2^3.3$	2.5.53	53	2.3^3	2.5.281
24	5^2	577	54	5.11	2917
25	2.13	2 313	55	2^3 7	2.17.89
26	3^3	677	56	3.19	3137
27	$2^2.7$	2.5 73	57	2.29	2.5^3.13
28	29	5.157	58	59	5 673
29	2.3.5	2.421	59	$2^2.3.5$	2.1741
30	31	17.53	60	61	13.277
61	2.31	2.1861	81	2.41	2.17.193
62	$3^2.7$	5 769	82	83	5^2.269
63	2^6	2.5.397	83	$2^2.3.7$	2.5.13.53
64	5.13	17.241	84	5.17	7057
65	2.3.11	2.2113	85	2.43	2.3613
66	67	4357	86	3.29	13.569
67	2^2.17	2.5.449	87	2^3.11	2.5.757
68	3.23	5^3.37	88	89	5.1549
69	2 5 7	2.2381	89	2 3^2.5	2.17.233
70	71	13^2.29	90	7.13	8101
71	$2^3.3^2$	2.2521	91	2^2.23	2 41.101
72	73	5.17.61	92	3.31	5.1693
73	2.37	2.5.13.41	93	2.47	2.5^2.173
74	3 5^2	5477	94	5.19	8837
75	2^2.29	2 29.97	95	2^5 3	2.4513
76	7 11	53 109	96	97	13.709
77	2.3.13	2.5.593	97	2.7^2	2 5.941
78	79	5.1217	98	3^2.11	5.17.113
79	$2^4.5$	2.3121	99	2^2 5^2	$2.13^2$29
80	3^4	37.173	100	101	11 9091

2. *Carrés de deux chiffres de forme* aa. À la lecture de cette table, on trouve, par exemple, pour $N = aa = a.(B+1)$,

$N=11$, $(B=3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 71, 80, 99)$.

$N=22$, $(B=7, 17, 23, 39, 49, 53, 55, 71, 87, 89, 95)$.

$N=33$, $(B=11, 23, 26, 47, 48, 53, 59, 74, 83, 95)$.

$N=44$, $(B=15, 63)$.

$N=55$, $(B=19, 24, 39, 44, 59, 62, 74, 79, 89)$.

$N=66$, $(B=23, 53, 95)$.

$N=77$, $(B=27, 52, 62, 83)$.

$N=\overline{11}\,\overline{11}$, $(B=43, 87, 98)$.

$N=\overline{13}\,\overline{13}$, $(B=51)$.

$N=\overline{17}\,\overline{17}$, $(B=67)$.

$N=\overline{19}\,\overline{19}$, $(B=75)$.

$N=\overline{23}\,\overline{23}$, $(B=91)$

3. *Cubes de deux chiffres de forme* bb. On observe de la même façon que, pour $N=bb=b.(B+1)$,

$N=11$, $(B=26, 63)$.

$N=22$, $(B=3, 31$.

$N=33$, $(B=8, 71)$.

$N=44$, $(B=15)$.

4. $N = 11$ est un bicarré pour $B = 15$ et 80, une sixième puissance exacte quand $B = 63$.

5. Enfin, il y a trois systèmes de numération dans lesquels la base est inférieure à 100 et où l'on rencontre des carrés *aaaa* formés de quatre chiffres identiques :

$$B = 7, \quad N_1 = aaaa = 1111 = (26)^2,$$
$$N_2 = aaaa = 4444 = (55)^2.$$

$$B = 41, \quad N = \overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21} = (\overline{29}\,\overline{29})^2.$$

$$B = 99, \quad N = \overline{58}\,\overline{58}\,\overline{58}\,\overline{58} = (\overline{76}\,\overline{16})^2.$$

Il existe aussi des systèmes dans lesquels on trouve des carrés de quatre chiffres, et même à la fois des carrés et des cubes de quatre chiffres de la forme *abab* et $a'b'a'b'$.

Exemples. $B = 41$. $N^2 = \overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}$;
$M^3 = 2\,\overline{34}\,2\,\overline{34}$.

$B = 57$. $N^2 = 2\,\overline{16}\,2\,\overline{16}$;
$M^3 = \overline{11}\,\overline{49}\,\overline{11}\,\overline{49}$.

$B = 70$, $B = 83, \ldots$

$B = 43$. $N^2 = 1\,\overline{31}\,1\,\overline{31}$; on a aussi $N'^2 = \overline{11}\,\overline{11}$, dans le même système.

$B = 68$. $N^2 = 2\,\overline{49}\,2\,\overline{49} = (\overline{13}\,\overline{41})^2$;
$M^3 = \overline{20}\,9\,\overline{20}\,9 = (2\,\overline{49})^3$.

N. B. On pourrait encore ajouter d'autres curiosités à la lecture des Tables ci-dessus.

V. THÉBAULT

---

13. — *Résolution en nombres entiers des équations*

$$x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^{2^k},$$
$$x^{2^k} + a\,x^{(2^k-1)}\,y + b\,y^2 = z^2,$$
$$x^2 + a\,x\,y^k + b\,y^{2k} = z^2,$$

a et b étant des entiers donnés, positifs ou négatifs, et k étant supérieur à 1.

1° On connaît la solution de l'équation

$$x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^2 ;$$

elle s'exprime par les formules :

$$x = m^2 - b\,n^2, \quad y = m\,n + a\,n^2, \quad z = m^2 + a\,m\,n + b\,n^2,$$

Pour résoudre par exemple

$$x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^{14},$$

il suffit de poser

$$m^2 + a\,m\,n + b\,n^2 = z'^2,$$

équation qui est satisfaite pour les valeurs suivantes de m, n et z' :

$$m = p^2 - b\,q^2, \quad n = 2\,p\,q + a\,q^2, \quad z' = p^2 + a\,p\,q + b\,q^2.$$

Si nous exprimons encore x et y à l'aide des paramètres indépendants p et q, nous trouvons les formules :

$$\begin{cases} x = (p^2 - b\,q^2)^2 - b\,(2\,p\,q + a\,q^2)^2, \\ y = 2\,(p^2 - b\,q^2)\,(2\,p\,q + a\,q^2) + a\,(2\,p\,q + a\,q^2)^2, \\ z' = p^2 + a\,p\,q + b\,q^2. \end{cases}$$

Le procédé donne la solution de toute équation de la forme

$$x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^{2^k}.$$

Exemples numériques.

$a = 1$, $b = 1$.

$$\begin{cases} 3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2 = 7^2 \\ 16^2 + (-16) \cdot 55 + 55^2 = 7^4 \text{ (ou } 4^4 - 4^2 \cdot 55 + 55^2 = 7^4) \\ 2769^2 + (-2769) \cdot 1265 + 1265^2 = 7^8. \end{cases}$$

$a = 3$, $b = 5$.

$$\begin{cases} 4^2 + 3\,(-4) \cdot 5 + 5 \cdot 5^2 = 9^2 \\ 109^2 + 3\,(-109) \cdot 35 + 5 \cdot 35^2 = 9^4 \\ 5756^2 + 3\,(5756) \cdot 3955 + 3955^2 = 9^8. \end{cases}$$

2° Considérons l'équation indéterminée

$$x^{2^k} + a\,x^{(2^k-1)}\,y + b\,y^2 = z^2.$$

Pour $k = 1$, on a la solution connue :

$$x = m^2 - b\,n^2, \quad y = 2\,m\,n + a\,n^2, \quad z = m^2 + a\,m\,n + b\,n^2.$$

Pour exposer notre méthode, résolvons par exemple l'équation pour $k = 2$; elle s'écrit dans ce cas :

$$X^4 + a\,X^2\,y + b\,y^2 = z^2.$$

En posant $m^2 - b\,n^2 = X^2$, nous avons

$$X = p^2 - b\,q^2, \quad n = 2\,p\,q, \quad m = p^2 + b\,q^2,$$

et, par conséquent,

$$y = 4\,p\,q\,(p^2 + b\,q^2) + 4\,a\,p^2\,q^2,$$
$$z = (p^2 + b\,q^2)^2 + a\,(p^2 + b\,q^2)\,2\,p\,q + 4\,b\,p^2\,q^2.$$

Ce procédé donne, de proche en proche, la solution générale de toute équation de la forme indiquée.

Exemples numériques.

$a=3,\quad b=5.$

$$\begin{cases} 2^4+3\,.\,2^2\,.\,9+5\,.\,9^2=23^2 \\ \quad (\text{ou } 2^4+3\,.\,2^2\,.\,3^2+5\,.\,3^4=23^2), \\ 2^8+3\,.\,2^4\,.\,276+5\,.\,276^2=628^2, \\ 2^{16}+3\,.\,2^8\,.\,211008+5\,.\,211008^2=472000^2. \end{cases}$$

3° Pour résoudre $x^2+a\,x\,Y^k+b\,Y^{2k}$, nous posons

$$y=2\,m\,n+a\,n^2=Y^k \quad \text{ou} \quad n\,(2\,m+a\,n)=Y^k,$$

équation satisfaite par

$$n=\alpha'\,A^k, \qquad m=\frac{\alpha''\,B^k-a\,\alpha'\,A^k}{2},$$

avec la condition $l+l'=k$. Le lecteur établira facilement les expressions paramétriques des inconnues.

Exemples numériques.

$k=2,\ a=1,\ b=1,\ \alpha=2,\ l=1,\ l'=1,\ A=1,\ B=2.$

$$5^2+5\,.\,4^2+4^4=19^2.$$

$k=2,\ a=1,\ b=3,\ \alpha=2,\ l=1,\ l'=1,\ A=1,\ B=2.$

$$(-3)^2+(-3)\,.\,4^2+3\,.\,4^4=27^2.$$

$k=3,\quad a=1,\quad b=3,\quad A=1,\quad B=2.$

1. $\alpha'=4,\quad \alpha''=2,$

$$(-12)^2+(-12)\,.\,4^3+3\,.\,4^6=108^2.$$

2. $\alpha'=2,\quad \alpha''=4,$

$$213^2+213\,.\,4^3+3\,.\,4^6=267^2.$$

$k=4,\quad a=1,\quad b=3,\quad A=1,\quad B=2.$

1. $\alpha'=2,\ \alpha''=8$: $3957^2+3957.4^4+3.4^8=4107^2.$
2. $\alpha'=4,\ \alpha''=4$: $852^2+852.4^4+3.4^8=1068^2.$
3. $\alpha'=8,\ \alpha''=2$: $(-3)^2+(-3).2^4+3.2^8=27^2.$
4. $A=1,\ B=3$: $1597^2+1597.3^4+3.3^8=1643^2.$

$\alpha'=1,\ \alpha''=1.$

Pour résoudre l'équation

$$x^2+a\,x\,Y^2+b\,Y^4=z^2,$$

on peut encore procéder ainsi: posons

$$y=n\,(2\,m+a\,n)=Y^2, \text{ puis } m=\frac{m'^2}{2},\ n=n'^2.$$

Il nous reste à résoudre

$$m'^2+a\,n'^2=w^2,$$

équation pour laquelle on a la solution générale

$$m'=p^2-a\,q^2, \quad n'=2\,p\,q, \quad w=p^2+a\,q^2.$$

Donc

$$m=\frac{(p^2-a\,q^2)^2}{2}, \qquad n=(2\,p\,q)^2.$$

On en déduit les expressions paramétriques de x, Y et z en fonction des paramètres indépendants p et q et des coefficients a et b de l'équation.

Exemple numérique. $a=1,\ b=3,\ p=1,\ q=3.$

$$(-179)^2+(-179)\,15^2+3\,.\,15^4=379^2.$$

A. GLODEN.

---

14. — *Calculul unor determinanți remarcabili.*

1. Să considerăm determinantul:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3\alpha & \beta+2\alpha & \alpha+2\beta & 3\beta \\ 3\alpha^2 & \alpha^2+2\alpha\beta & \beta^2+2\alpha\beta & 3\beta^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}.$$

Pentru calcul, procedăm cum urmează. Din elementele coloanelor II, III, IV scădem elementele coloanei I, şi avem:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\alpha & \beta-\alpha & 2(\beta-\alpha) & 3(\beta-\alpha) \\ 3\alpha^2 & 2\alpha(\beta-\alpha) & (3\alpha+\beta)(\beta-\alpha) & 3(\beta^2-\alpha^2) \\ \alpha^3 & \alpha^2(\beta-\alpha) & \alpha(\beta^2-\alpha^2) & \beta^3-\alpha^3 \end{vmatrix}.$$

Dacă desvoltăm acest determinant după elementele liniei I, apoi dacă în determinantul care rămâne scoatem pe $\beta-\alpha$ ca factor în fiecare linie, căpătăm:

$$D=(\beta-\alpha)^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 3\alpha+\beta & 3\beta+3\alpha \\ \alpha^2 & \alpha\beta+\alpha^2 & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \end{vmatrix}.$$

Dacă în determinantul care a rămas, scădem elementele coloanei I, înmulţite succesiv cu 2 şi 3, respectiv din elementele coloanelor II şi III, căpătăm:

$$D=(\beta-\alpha)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta-\alpha & 3(\beta-\alpha) \\ \alpha^2 & \alpha(\beta-\alpha) & (2\alpha+\alpha)(\beta-\alpha) \end{vmatrix}.$$

Dacă desvoltăm ultimul determinant după elementele liniei I, şi dacă apoi în determinantul care rămâne, scoatem din nou pe $\beta - \alpha$ ca factor în fiecare linie, avem:

$$D=(\beta-\alpha)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & 2\alpha+\beta \end{vmatrix}=(\beta-\alpha)^6.$$

Prin urmare dar, avem valoarea căutată:

$$D=(\alpha-\beta)^6.$$

2. Să considerăm acum determinantul:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4\alpha & 3\alpha+\beta & 2\alpha+2\beta & \alpha+3\beta & 4\beta \\ 6\alpha^2 & 3\alpha^2+3\alpha\beta & \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2 & 3\beta^2+3\alpha\beta & 6\beta^2 \\ 4\alpha^3 & \alpha^3+3\alpha^2\beta & 2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2 & \beta^3+3\alpha\beta^2 & 4\beta^3 \\ \alpha^4 & \alpha^3\beta & \alpha^2\beta^2 & \alpha\beta^3 & \beta^4 \end{vmatrix}.$$

Dacă procedăm în mod analog ca mai sus, după o serie de operaţiuni analoage cu acelea utilizate pentru calculul lui D, găsim,

$$D_1=(\alpha-\beta)^{10}.$$

VIRGIL CLAUDIAN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, Nr. 9, Mai 1944. Formule pentru calculul suprafeţelor laterale ale solidelor rezultate din tăierea unui con circular drept cu un plan, (urmare şi sfârşit), de Ing. *O. S. Ianculescu*. Raport pentru acordarea premiului de Algebră (*A. G. Ioachimescu*), de *V. Alaci, Th. Angheluţă, Al. Bunescu*. Note matematice; chestiuni de examen; probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin Scientifique de L'École Politechnique de Timişoara, Tome 11, Fasc, 3—4*. Un problème de géometrie, par *D. Pompeiu*. La solution analytiques d'un système fonctionnel, par *V. Alaci*. Sur le dévelopement d'une fonction holomorphe dans une série de polynomes, par *Th. Angheluţă*. Sur quelques équations fonctionnelles, par *Michel Ghermănescu*. Sur une correspondance effective entre l'ensemble des fonctions continues et un ensemble de nombres réels, par *Piotr Szymanski*. Einige zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate, von *Alfred Moessner*, und Dr. *Albert Gloden*. Géométrie du triangle et du tétraèdre, par *V. Thébault*. Sur le mouvement d'une plaque rigide dans son propre plan, par *I. Cârstoiu*. Beitrag zur Berechnung von Axialpumpen mit positiver Saughöhe, von Dr. Ing. *Aurel Bărglăzan*. Verstärkunszahl von Trioden mit Parallelsteggitter, von Dr. Ing. *Remus Răduleţ*. Die Oxydation von Maisöl und Sonnenblumenöl, von Prof. Dr. Ing. *C Cândea* und Ing. *C. Manughevici*. Die Horizontalseismometer der neuen Erdbebenwarte in Timişoara, von Prof. *I. Curea*. Die Polhöhe von Timişoara nach Beobachtungen im I. Vertical, von *I. Armeanca*. Noutăţi în domeniul organelor de maşini de Ing. *V. Bumbu*. O cuplă supraelastică, de Ing. *V. Bumbu*. Contribuţii la cunoaşterea platanului din Timişoara, de Inginer Inspector Silvic, *Tiberiu Cernescu*. Comptes-rendu des séances de la Société Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara.

3. Prof. Dr. *Ioan Curea*. Infiinţarea unei staţiuni seismice la Timişoara. (Extras din „Revista Banatului", vol. 4—6).

4. *I. Curea*. Bulletin Séismique, 1944, Mars.

5. Dr. *Valer Novacu*. Introducere în Mecanica Undulatoare. (Institutul de Fizică al Facultăţii de Ştiinţă din Timişoara.)

Este o interesantă monografie, într'un nou domeniu creat de *L. de Broglie*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2079. — *Să se găsească funcţia cea mai generală* $\varphi(x, y, z, t)$, *care satisface ecuaţiei funcţionale*

$$\varphi(x, y, z, t)=\varphi(y, x, t, z).$$

M GHERMANESCU

Soluţie. Se ştie că orice funcţie de două variabile poate fi considerată ca fiind suma a două funcţii, prima simetrică, a doua simetric strâmbă, în raport cu cele două variabile.

Privind, de exemplu, variabilele z şi t, vom putea deci scrie

$$(1)\qquad \varphi(x, y, z, t)=\lambda(x, y, z, t)+\mu(x, y, z, t),$$

în care $\lambda(x, y, z, t)$ şi $\mu(x, y, z, t)$, sunt funcţii absolut arbitrare, prima simetrică, a doua simetric strâmbă în raport cu z şi t, adică satisfac relaţiilor funcţionale

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda(x, y, z, t)&=\lambda(x, y, t, z), \\ \mu(x, y, z, t)&=-\mu(x, y, t, z). \end{aligned}$$

Inlocuind, în ecuaţia dată, $\varphi(x, y, z, t)$ prin expresia (1) şi ţinând seama de relaţiile (2), avem

$$\lambda(x, y, z, t)+\mu(x, y, z, t)=\lambda(y, x, z, t)-\mu(y, x, z, t)$$

sau încă

$$\lambda(y, x, z, t)-\lambda(x, y, z, t)=\mu(x, y, z, t)+\mu(y, x, z, t).$$

Primul membru al acestei egalităţi este simetric strâmb, pe când al doilea este simetric în raport

cu variabilele x şi y; o asemenea egalitate este deci imposibilă, afară de cazul când fiecare membru este identic nul, adică

$$\lambda(y,x,z,t)=\lambda(x,y,z,t),$$

$$\mu(y,x,z,t)=-\mu(x,y,z,t),$$

care arată că funcţia $\lambda(x,y,z,t)$ este simetrică, iar $\mu(x,y,z,t)$ este simetric strâmbă şi în raport cu grupul de variabile (x,y).

Rezultă dar că *funcţia cea mai generală care satisface ecuaţia funcţională propusă este dată de* (1), *în care* $\lambda(x,y,z,t)$ *şi* $\mu(x,y,z,t)$ *sunt funcţii absolut arbitrare, prima simetrică, iar a doua, simetric strâmbă în raport cu perechile de variabile* (x,y), (z,t).

Notă. La această problemă nu s'a primit nici o soluţie. Publicăm, totuş rezolvarea ei, pentru a familiariza pe corespondenţii noştrii cu domeniul atât de vast şi de puţin explorat al ecuaţiilor funcţionale. M. G,

---

Problema 2106. — *Se cere un număr de patru cifre astfel ca suma cifrelor să fie* 27, *iar numărul cetit de la dreapta la stânga, să fie un număr cu* 999 *mai mic.*

C. BAKONYI

Soluţie. Dacă $abcd$ este numărul cerut, atunci $dcba$ este numărul cetit de la dreapta la stânga. Explicitând aceste numere şi făcând diferenţa, avem conform enunţului

$$1000a+100b+10c+d-1000d-100c-10b-a=999$$

şi simplificând putem scri

$$999a+90b-90c-999d=999,$$

sau

$$111(a-d)+10(b-c)=111.$$

Se vede uşor de aci că trebuie să luăm

$$(1)\qquad \begin{aligned} a-d&=1,\\ b-c&=0. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, tot din enunţ, putem scri

$$(2)\qquad a+b+c+d=27.$$

Adunând relaţiile (1) cu (2) şi simplificând prin 2, obţinem

$$(3)\qquad a+b=14.$$

Cum a şi b sunt numere de o singură cifră, relaţia (3) este satisfăcută luând respectiv

a	9	8	7	6	5
b	5	6	7	8	9

Pe de altă parte din relaţia (1) rezultând

$$d=a-1,\qquad b=c,$$

deducem cu uşurinţă că problema admite următoarele 5 soluţii:

9558, 8667, 7776, 6885, 5994.

Au dat bune soluţii d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru*, (Polit, Timişoara), *Bosie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Enache Ion* (S-lt.), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit.. Timişoara), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic. Tg-Jiu), *Giurconiu Gh. Mihail* (Lic. Tg-Jiu), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit, Timişoara), *Ieşan Alexandru* (Lic. Matei Basarab. Bucureşti), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Knopf Hermann* (Lic. Banaţia, Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Strejea N. Iorgu* (Lic. Milit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara). *Vrânceanu Gh* (Lic Milit., Timişoara), *Wigh Jean* (Lic. Titu Maiorescu, Bucureşti) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2107. — *Să se stabilească identitatea*

$$\frac{ab+b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{ac+c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$

$$\frac{ad+d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=\frac{2a^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

S-LT M. GRUMAZESCU

Soluţie dată de d-l Lt. Chiriac C-tin. Descompunând prima fractie a sumei date, avem:

$$(1)\quad \frac{ab+b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}=\frac{A}{b-a}+\frac{B}{b-c}+\frac{C}{b-d}.$$

Înmulţind respectiv cu $(b-a)$, $(b-c)$, $(b-d)$ şi făcând respectiv pe $b=a$, $b=c$, $b=d$, determinăm:

$$A=\frac{2a^2}{(a-c)(a-d)},\qquad B=\frac{ac+c^2}{(c-a)(c-d)},$$

$$C=\frac{ad+d^2}{(d-a)(d-c)}.$$

Înlocuind în (1), avem

$$\frac{ab+b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}=\frac{2a^2}{(b-a)(a-c)(a-d)}+$$

$$\frac{ac+c^2}{(b-c)(c-a)(c-d)}+\frac{ad+d^2}{(b-d)(d-a)(d-c)}.$$

Trecând ultimii doi termeni a-i membrului al

2-lea în primul membru şi dând semnul — primului factor al numitorului, avem

$$\frac{ab+b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{ac+c^2}{(c-b)(c-a)(c-d)}+$$
$$\frac{ad+d^2}{(d-b)(d-a)(d-c)}=\frac{2a^2}{(b-a)(c-a)(d-a)},$$

care este identitatea cerută.

Soluţii analoage cu cea care urmează date de autor şi de d-nii Bosie V. Boris (Polit., Timişoara) şi Gligor N. Ioan (student, Timişoara).

O fracţie propriu zisă, ireductibilă, de forma $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, unde $\varphi(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-l)$, se ştie că, se descompune în fracţii simple, astfel

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\sum\frac{f(a)}{\varphi'(a)}\cdot\frac{1}{x-a}.$$

Dacă presupunem că $f(x)$ este un polinom de un grad, cu cel puţin două unităţi mai mic ca gradul numitorului, atunci înmulţind cu x relaţia (1) şi făcând apoi $x=\infty$, obţinem, după cum se cunoaşte, următoarea identitate a lui *Euler*

$$(2)\qquad \sum\frac{f(a)}{\varphi'(a)}=0.$$

Luând $f(x)=x(x+a)$ şi $\varphi(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ şi observând că

$$\varphi'(x)=(x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+$$
$$(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c),$$

relaţia (2) devine

$$\frac{a(a+a)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b(b+a)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$\frac{c(c+a)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d(d+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Această relaţie se mai poate scri

$$\frac{ab+b^2}{(b-a)(b-c)(b-c)}+\frac{ac+c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$
$$\frac{ad+d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=\frac{2a^2}{(b-a)(c-a)(d-a)},$$

adică tocmai identitatea cerută,

Soluţie dată de d-nii: Gâţă Gh. Gheorghe (lic. Tg-Jiu) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Numitorul comun al fracţiilor din primul membru este,

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d).$$

Aducând la acelaşi numitor fracţiile din primul membru, găsim pentru numărător expresia:

$$(1)\quad M=-b(a+b)(c-d)(d-a)(a-c)+$$
$$c(a+c)(a-b)(b-d)(d-a)+$$
$$d(a+d)(a-b)(b-c)(a-c).$$

Făcând în M, $c=d$ găsim $M=0$; de asemeni pentru $b=c$ şi $b=d$, avem $M=0$. Conchidem că M se divide prin, $(b-c)(c-d)(b-d)$. M fiind omogen şi de gradul al 5-lea în raport cu a, b, c, d, urmează că,

$$(2)\qquad M=(b-c)(c-d)(b-d)\,P(a,\dots)$$

Dând lui b, c, d, valori numerice arbitrare şi identificând pe M din (1) şi (2) se găseşte

$$M=2a^2(b-c)(c-d)(b-d)$$

şi prin urmare primul membru al identităţii este egal cu

$$\frac{2a^2(b-c)(c-d)(b-d)}{(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)}=$$
$$\frac{2a^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

Au dat soluţii mai lungi, aducând la acelaşi numitor fracţiile din primul membru, simplificând şi descompunând numărătorul în factori, d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Gr. Joan* (Lic. Milit., Timişoara), *Giurconiu Gh. Mihail* (Lic. Tg.-Jiu), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Mahrenholz Iohannes* (Cottbus), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara).

Problema 2109. — *Să se stabilească relaţia*

$$\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+\frac{3}{4}C_n^3+\dots+\frac{n}{n+1}C_n^n=$$
$$\frac{1+(n-1)2^n}{n+1},$$

unde C_n^p, *înseamnă combinări a n obiecte luate câte p.*

ION RIZESCU

Soluţie dată de d-nii Bitang Alexandru (Polit., Timişoara) şi *Mahrenholz Johannes* (Cottbus).

Însemnând cu E primul membru al relaţiei din enunţ, putem scri succesiv,

(1) $$E = C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$
$$-\left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n\right)$$
$$= C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$
$$-\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{2}C_n^1 + \frac{n+1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{n+1}{n+1}C_n^n\right).$$

Cum avem cunoscută relaţia

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1,$$

iar pe de altă parte, fiindcă

$$\frac{n+1}{k+1}C_n^k = C_{n+1}^{k+1},$$

relaţia (1) devine

$$E = 2^n - 1 - \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \cdots + C_{n+1}^{n+1})$$
$$= 2^n - 1 - \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1)$$
$$= 2^n - 1 - \frac{2^{n+1} - 1 - n - 1}{n+1} = \frac{2^n(n+1) - 2^{n+1} + 1}{n+1},$$

deci

$$E = \frac{1 + 2^n(n-1)}{n+1}.$$

Avem astfel stabilită relaţia cerută.

Altă soluţie dată de autor şi de d-nii Anton Ioan (Polit., Timişoara) şi *Chiriac C-tin* (Lt.).

Plecăm de la dezvoltarea binomului

$$1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n = (1+x)^n$$

şi derivăm în raport cu x, avem

$$C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Înmulţim apoi această relaţie cu x şi o integrăm de la 0 la x, obţinem

(2) $$C_n^1 \int_0^x x\,dx + 2C_n^2 \int_0^x x^2\,dx + \cdots + nC_n^n \int_0^x x^n\,dx =$$
$$n\int_0^x x(1+x)^{n-1}\,dx = \int_0^x x\,d(1+x)^n.$$

Cum

$$\int_0^x x\,d(1+x)^n = x(1+x)^n - \int_0^x (1+x)^n\,dx =$$
$$x(1+x)^n - \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1},$$

iar integralele din primul membru sunt uşor de efectuat, relaţia (2) devine

$$\frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{2}{3}C_n^2 x^3 + \cdots + \frac{n}{n+1}C_n^n x^{n+1} =$$
$$x(1+x)^n - \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Dacă aci facem $x = 1$, găsim

$$\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{n}{n+1}C_n^n =$$
$$2^n - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{2^n(n+1) - 2^{n+1} + 1}{n+1},$$

sau

$$\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{n}{n+1}C_n^n = \frac{1 + 2^n(n-1)}{n+1},$$

adică tocmai relaţia cerută.

Problema 2115. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^4 + 2ax^3 + 4a^2x^2 + 2a^3x + a^4 = 0.$$

EUGEN WEGENER

Soluţie. Ecuaţia dată se mai poate scri

$$(x^2 + a^2)^2 + 2ax(x^2 + a^2) + 2a^2x^2 = 0,$$

sau

$$(x^2 + a^2 + ax) = -a^2x^2.$$

De aci deducem

$$x^2 + a^2 + ax = \pm iax, \qquad (i = \sqrt{-1}.)$$

Avem astfel aci următoarele două ecuaţii de gradul al 2-lea

(1) $$x^2 + a(1-i)x + a^2 = 0, \quad x^2 + a(1+i)x + a^2 = 0,$$

ale căror rădăcini sunt respectiv

$$x_{1,2} = \frac{a(i-1) \pm a\sqrt{-2i-4}}{2} = \frac{a}{2}\left[-1 + i\left(1 \pm \sqrt{2(2+i)}\right)\right].$$

(1′)
$$x_{3,4} = \frac{a}{2}\left[-1 - i\left(1 \mp \sqrt{2(i-2)}\right)\right].$$

Au dat soluţii analoage, d-nii: *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), şi *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara).

Altă soluţie. Împărţind ecuaţia prin a^2x^2 şi grupând convenabil termenii, avem

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} + 2\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) + 4 = 0.$$

Punând

(3) $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=y$, deci $\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}=y^2-2$,

ecuația (2) devine

$$y^2+2y+2=0,$$

de unde

$$y=-1\pm i, \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Inlocuind aceste valori în (3) și apoi aducând la forma întreagă, avem

$$x^2+a(1-i)x+a^2=0 \quad \text{și} \quad x^2+a(1+i)x+a^2=0,$$

care nu sunt decât ecuațiile (1) din prima soluție și deci au aceleași rădăcini (1′).

Soluții analoage date de d-rele *Măran Ana* (Polit., Timișoara), *Tarța Valeria* (Polit., Timișoara) și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Bică Emilian* (Brașov), *Bosie V. Boris* (Polit., Timișoara), *Cârnațiu I. Ioan* (Lic. Blaj), *Cicerean Gh.* (Arad), *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Creța F. Gavril* (Polit., Timișoara), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timișoara), *Frunză Radu* (Lic. Loga Timișoara), *Gâță Gh. Gheorghe* (Lic. Tg-Jiu), *Godea I.* (Polit., Timișoara), *Godis Gh.* (Lic. Beiuș), *Grozescu Liviu* (Polit., Timișoara), *Iacob Șt. Eugen* (Cpt), *Logofătu M. Tănase* (Lic. Beiuș), *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Malița A. Mircea* (Lic. Beiuș), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Marinescu N., Miclea Nicolae* (Lic. Alba-Iulia), *Munteanu Gh. Lucian* (Polit., Timișoara), *Mușiu S. Antim* (Polit., Timișoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timișoara), *Pop Emil* (Polit., Timișoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit. Timișoara), *Rădoiu N. Nicolae* (Polit., Timișoara), *Rădulescu V. Nicolae* (Călărași), *Soare Mircea* (București), *Serengău Mihai* (Lic. Loga, Timișoara), *Șipoș I. Eugen* (Polit., Timișoara), *Ștefănescu Marin* (Lt., Brăila), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timișoara), *Tulvan V. Mircea* (Lic. Beiuș), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraș) și *Țigănoiu Alexandru* (Polit., Timișoara).

Problema 2146. — *Să se găsească numărul* $N=n^2$ *prim cu* 4400 *numere din șirul* $1, 2, \ldots, N$, *n fiind un produs de numere prime la puterea întâia.* VIRGIL BARBU

Soluție. Din enunț rezultă că indicatorul lui N este 4400, adică

(1) $$\varphi(N)=4400=2^4\times 5^2\times 11.$$

De altă parte, dacă $a, b, c, \ldots, l$ sunt factori primi a-i lui N și $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ puterile lor, după cele ce știm din teoria indicatorilor, avem

(2) $$\varphi(N)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots l^{\lambda-1}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots(l-1).$$

Din (1) și (2) deducem,

(3) $$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)c-1)=2^4\times 5^2\times 11.$$

Privind relația 3), conchidem că unul din factorii din primul membru este 11, fie

$$a-1=11, \quad \text{sau} \quad a=11.$$

Dacă $a-1=11$, urmează $a=12$, ceeace nu se poate, căci 12 are factorul 3, care nu se găsește ca divizor în membrul al 2-lea.

Dacă luăm $a=11$, rezultă $\alpha=2$, $a-1=10$ și relația (3) devine

$$11\,.\,b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\,.\,10\,.\,(b-1)(c-1)=2^4\times 5^2\times 11,$$

simplificând avem

(4) $$b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(b-1)(c-1)=2^3\times 5.$$

Privind relația (4), conchidem că unul din factorii din primul membru este 5, fie

$$b-1=5, \quad \text{sau} \quad b=5.$$

Dacă $b-1=5$, urmează $b=6$, ceeace nu se poate, căci 6 are factorul 3, care nu se găsește ca divizor în membrul al 2-lea.

Dacă luăm $b=5$, rezultă $\beta=2$, $b-1=4$ și relația (4) devine

$$5\,.\,c^{\gamma-1}\,.\,4\,.\,(c-1)=2^3\times 5,$$

simplificând, rămâne

$$c^{\gamma-1}(c-1)=2.$$

Această relație este verificată numai dacă luăm $c=2$, $\gamma=2$. Rezultă că numărul cerut N este

$$N=11^2\times 5^2\times 2^2=12100.$$

Cum 12100 este și patrat perfect și cum rădăcina lui patrată $n=11\times 5\times 2$ este un produs de numere prime la puterea întâia, rezultă că numărul 12100 este soluția problemei.

Soluții bune date de d-nii: *Pălăceanu D. Vasile* (Lic Milit., Timișoara, *Rogoz V. Ioan* (Lic. Milit, Timișoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Milit., Timișoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraș) și *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (Lic. Milit, Timișoara).

Problema 2175. — *Să se determine constantele a, b, c astfel ca derivata funcției*

(1) $$y=ax+\frac{20x^2(x+3)}{1+4x^2}-b\log(1+4x^2)-4c\operatorname{arctg}2x,$$

să admită rădăcinele — 1, 0, 1.

Să se precizeze pentru fiecare din aceste valori, dacă funcția este maximă sau minimă. Mai sunt valori ale variabllei x pentru care funcțta (1) admite maxim saum minim?

(Simbolul log, înseamnă logaritm neperian.)

V. ALACI

Soluție. Derivăm funcția (1) și avem succesiv

$$(2)\quad y'=a+20\frac{(3x^2+6x)(1+4x^2)-8x^3(x+3)}{(1+4x^2)^2}-\frac{8bx+8c}{1+4x^2}$$

$$=a+\frac{20x(4x^3+3x+6)}{(1+4x^2)^2}-\frac{8(bx+c)}{1+4x^2}.$$

Dacă în (2) facem pe rând $x=-1$, 0, 1 şi apoi anulăm derivata, obţinem

$$\begin{cases} a+\frac{20}{25}-\frac{8c-8b}{5}=0 \\ a-8c=0 \\ a+\frac{260}{25}-\frac{8c+8b}{5}=0, \end{cases}$$

sau

$$(3)\quad \begin{cases} 5a+8b-8c=-4 \\ a-8c=0 \\ 5a-8b-8c=-52. \end{cases}$$

Acest sistem ne determină pe a, b, c, în condiţiile problemei.

Dacă înlocuim în prima şi a 3-a ecuaţie din (3) $a=8c$, scoasă din ecuaţia 2-a, obţinem simplificând cu 4,

$$\begin{cases} 8c-2b=-1 \\ 8c+2b=-13. \end{cases}$$

Adunând şi scăzând aceste ecuaţii, avem

$$\begin{cases} c=-\frac{7}{8} \\ b=3. \end{cases}$$

Înlocuind valoarea găsită pentru c, în ecuaţia 2-a din (3), deducem $a=-7$.

Astfel, constantele a, b, c, cerute, au valorile

$$\begin{cases} a=-7 \\ b=3 \\ c=-\frac{7}{8}. \end{cases}$$

Acum, ne întoarcem la expresia derivatei (2) şi înlocuind valorile găsite pentru a, b, c, putem scri succesiv,

$$y'=-7+\frac{20x(4x^3+3x+6)}{(1+4x^2)^2}-\frac{24x-7}{1+4x^2}=$$

$$\frac{-7(1+8x^2+16x^4)+20x(4x^3+3x+6)-(24x-7)(1+4x^2)}{(1+4x^2)^2}=$$

$$\frac{-32x^4-96x^3+32x^2+96x}{(1+4x^2)^2}=-32\frac{x(x^3+3x^2-x-3)}{(1+4x^2)^2}=$$

$$-32\frac{x[x(x^2-1)-3(x^2-1)]}{(1+4x^2)^2}$$

sau

$$(4)\quad y'=-32\frac{x(x-1)(x+1)(x+3)}{(1+4x^2)^2}.$$

De aci se vede că derivata funcţiei (1) se anulează pe lângă valorile $x=-1$, 0, 1 şi pentru $x=-3$.

Mai rămâne să precizăm dacă funcţia (1) este maximă sau minimă pentru fiecare din valorile -3, -1, 0, 1, care anulează derivata. Pentru aceasta, întocmim următorul tablou de variaţie, uşor de construit, privind relaţia (4):

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ţinând seamă că o funcţie $y=f(x)$ este maximă sau minimă pentru valorile lui x care anulează derivata — şi anume, este maximă dacă derivata trece prin valoarea zero de la pozitiv la negativ şi este minimă în caz invers — deducem din tabloul de mai sus.

Pentru $x=-3$ şi $x=0$, funcţie (1) este minimă.

Pentru $x=-1$ şi $x=1$, funcţia (1) este maximă.

Soluţii bune date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Birănaş Ioan*, *Cârnaţiu I. Ion* (Lic. Blaj), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timişoara), *Chiriac C-tin* (Lt), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timişoara), *Godea J.* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Miclea Nicolaie* (Alba-Iulia), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Georgescu C. Nicolin* (Polit., Timişoara), *Pat I Moise* (Polit., Timişoara), *Păläceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Serengău Mihai* (Lic. Loga, Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic Loga, Timişoara), *Ţigănoiu I. Alexandru* (Polit, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2181. — *Să se demonstreze că, dacă x_1 şi x_2 sunt numere întregi şi mai mari de cât 1 şi dacă x_1 este mai mare ca x_2, avem:*

$$x_1+\frac{x_2}{x_1}>x_2+\frac{x_1}{x_2}.$$

LT. GEORGE P. BOERESCU

Soluţie. Dacă x_1 şi x_2 sunt întregi pozitivi mai mari ca 1, să stabilim întâi inegalitatea

$$(1)\quad x_1x_2>x_1+x_2.$$

Pentru aceasta, observând că x_1, x_2 sunt de forma

$$x_1 = 1 + \alpha, \qquad x_2 = 1 + \beta$$

unde α şi β sunt întregi pozitivi, putem scri

$$(2) \qquad x_1 x_2 = (1+\alpha)(1+\beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta.$$

Cum α, β sunt întregi pozitivi, rezultă $\alpha\beta > 1$ şi deci din (2) deducem

$$x_1 x_2 > 1 + \alpha + \beta + 1 = x_1 + x_2,$$

astfel inegalitatea (1) este stabilită.

Mai departe, ţinând seamă că prin enunţ $x_1 > x_2$, înmulţind inegalitatea (1) cu $x_1 - x_2 > 0$, avem

$$x x_2 (x_1 - x_2) > (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Impărţind această inegalitate cu produsul pozitiv $x_1 x_2$, găsim

$$x_1 - x_2 > \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1},$$

de unde

$$x_1 + \frac{x_2}{x_1} > x_2 + \frac{x_1}{x_2}.$$

Inegalitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Avram Gh. Cristache* (Lic., Brăila), *Cârnaţiu I. Ion* (Lic., Blaj), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Cochela I. Liviu* (Lic. Milit., Timişoara), *Constantinescu N. Ilie* (Lic., Brăila), *Cotariu D. Marcel* (Brăila), *Creţa F. Gavril* (Polit., Timişoara), *David Vasile* (student), *Enache Ion* (S.-Lt.), *Filimon Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timişoara), *Gâtă Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Georgescu Nicolin* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit., Timişoara), *Goldiş Gheorghe* (Lic., Beiuş), *Groza Liviu* (Lic., Deva), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Hendli Martin*, *Logofătu Tănase* (Lic., Beiuş), *Malita A. Mircea* (Lic., Beiuş), *Mazilu Marius* (Lic., Caransebeş), *Miclea Nicolae* (Alba Iulia), *Munteanu Gh. Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Pat I. Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Pop Emil* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic., Milit., Timişoara), *Rogoz Ioan* (Lic., Milit., Timişoara), *Sabău Gh. Mihai* (Polit., Timişoara), *Serengău Mihai* (Lic., Loga, Timişoara), *Szabo Iuliu* (Polit., Timişoara), *Teiuşianu Horia* (Lic., Beiuş), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor I. Aurel* (Lic., Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara), *Vrănceanu G.* (Lic., Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2241. — Se cer patratele perfecte de forma $\overline{abcdab}$ ştiind că $cd = 2ab$.

LUCIAN MUNTEANU

2242. — Să se verifice identitatea

$$\frac{2a(a+b)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(a+c)(b+c)}{(a-c)(b-c)(c-d)} = \frac{2b(a+b)}{(a-b)(b-c)(b-d)} + \frac{(d+a)(d+b)}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

AL TIGANOIU

2243. — Să se demonstreze că expresia

$$\frac{\Sigma[a\lambda^2 + (a+c-b)\lambda + c]^2}{(1+\lambda+\lambda^2)^2},$$

este independentă de λ.

V. ALACI

2244. — Să se determine α şi să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 + \alpha x + 24 = 0,$$

ştiind că între rădăcini există relaţia

$$2(x_1 x_2 + x_3 x_4 + 1) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4).$$

I. C. BALAN

2245. — Să se arate că

$$\sum_{p=1}^{n} p(C_{p+2}^1 + C_{p+4}^2) = \frac{n(n+1)(n^2+13n+38)}{8}.$$

M. NEUMANN

2246. — Să se demonstreze relaţiile următoare între elementele obicinuite ale unui triunghiu.

$$-bc + ca + ab = -(p-a)^2 - r_a^2 + 4Rr_a$$

$$bc - ca + ab = -(p-b)^2 - r_b^2 + 4Rr_b$$

$$bc + ca - ab = -(p-c)^2 - r_c^2 + 4Rr_c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p-a)^2 - 2r_a^2 + 8Rr_a =$$

$$2(p-b)^2 - 2r_b^2 + 8Rr_b = 2(p-c)^2 - 2r_c^2 + 8Rr_c.$$

V. THÉBAULT

2247. — Prin vârful B al triunghiului ABC se duce o dreaptă, care întâlneşte in M mediana AA'. Paralela din M la AB taie pe BC în P, iar AP taie pe BM în N. Să se arate că A'N este paralelă cu AC.

G-L. GH. BUICLIU

2248. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} a\cos(x+y-z) - c\cos(x-y+z) = 2S\dfrac{a-b}{ab}, \\ b\cos(-x+y+z) - a\cos(x+y-z) = 2S\dfrac{b-c}{bc}, \\ c\cos(x-y+z) - b\cos(-x+y+z) = 2S\dfrac{c-a}{ac}. \end{cases}$$

C. C. TINCU

FACULTATEA DE ȘTIINȚE CLUJ-TIMIȘOARA

PROGRAMUL
SĂPTĂMÂNII MATEMATICE (12—19 IUNIE 1944).

12 Iuúnie, orele 16 1/2.

Prof. TH. ANGHELUȚĂ : Cuvânt de deschidere.

Prof. C. IACOB : Privire asupra activității secției de Matematici a Universității clujene în anul școlar 1943/1944.

Prof. TH. ANGHELUȚĂ : O ecuație funcțională caracteristică transformărilor liniare.

Prof. V. ALACI : O clasă remarcabilă de ecuații algebrice.

Prof. D. V. IONESCU : Probleme asupra unor ecuații de recurență lineare cu doi indici. Considerațiuni geometrice în legătură cu ecuația de gradul al doilea cu coeficienți complexi.

13 Iunie, orele 16 1/2.

Prof. G. IUGA : Repartizarea punctelor raționale în plan și spațiu.

Prof. A. MAIOR : Energia la punctul zero și gravitația.

Prof. P. SERGESCU : Subiect rezervat.

Prof. GH. TH. GHEORGHIU : Suprafețe care au un punct pe cuadrica lui Lie, care descrie o suprafață identică proiectiv cu prima.

Prof. N. ABRAMESCU : Asupra unei proprietăți a vârfurilor unui tetraedru în raport cu ariile fețelor care trec prin aceste vârfuri.

14 Iunie, orele 16 1/2.

Prof. N. ABRAMESCU : Asupra curburii afine a desfășuratei afine a unei curbe plane.

Prof. G. CĂLUGĂREANU : Problema singularităților funcțiilor analitice.

Prof. D. V. IONESCU : O aplicație a ecuației de recurență lineare cu doi indici.

Conf. EM. ARGHIRIADE : Subiect rezervat.

15 Iunie, orele 16 1/2.

Prof. G. CĂLUGĂREANU : Determinarea polinoamelor lui Tchebichef prin metoda lui Julia-Pólya.

Conf. I. CUREA : Asupra iuțelii de propagare a undelor seismice superficiale.

Dr. V. NOVACU : Despre calculul spinorilor. (Referat I).

16 Iunie, orele 16 1/2.

V. MARIAN : Contemporanii lui Newton.

Prof. C. IACOB : Asupra unor teoreme de cinematica fluidelor.

Dr. V. NOVACU : Despre calculul spinorilor. (Referat II).

17 Iunie, orele 16 1/2.

Prof. G. CĂLUGĂREANU : Observări asupra numerelor prime.

Conf. I. ARMEANCA : Subiect rezervat.

Prof. C. IACOB : Calculul traectoriilor bombelor de avion. (Referat).

19 Iunie, orele 16 1/2.

Prof. P. SERGESCU : Matematica în învățământul tehnic român.

Prof. GH. TH. GHEORGHIU : Asupra demonstrației formulei lui **Euler.**

Prof. P. SERGESCU : Din istoria Matematicei.

Continuând o tradiție începută încă din 1929 la Cluj, din inițiativa d-lui profesor *Th. Angheluță*, Cercul matematic al Facultății de Științe Cluj—Timișoara, a organizat și anul acesta cu toate imprejurările vitrege prin care trecem, o săptămână matematică.

Voim să vedem în această săptămână matematică, un omagiu adus soldaților noștri ce luptă cu atâta eroism pe frontul de Est și un început de bun augur pentru o activitate mai intensă ce o vom dezvolta în viitor, într'o Românie reîntregită și independentă.

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Legându-se colecțiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu prețul de lei 400 volumul și se trimet la cerere.

ANUL XXIV. AUGUST 1944 No. 6.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITATEA TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **CAIUS IACOB:** DESPRE CALCULUL TRAECTORIILOR BOMBELOR DE AVION.
2. NOTE MATEMATICE 15, 16, 17, 18.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1037, 2077, 2081, 2114.
6. PROBLEME PROPUSE: 2249–2256.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Avem plăcerea să anunţăm că începând de la 15 August 1944 mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi D-nul *Hristache Şt. Dăscalescu*, profesor la liceul din R-Sărat, un distins colaborator al nostru încă din anul 1925.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 6. TIMISOARA, AUGUST 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

DESPRE CALCULUL TRAECTORIILOR BOMBELOR DE AVION[1]

DE

CAIUS IACOB

1. Vom expune în cele ce urmează câteva date, cari ne pot da indicații utile pentru precizarea ideilor noastre în legătură cu fenomenul lansării bombelor de avion, fără a avea totuși pretenția de a pătrunde secretele militare de care este încă inconjurată această problemă.

Metodele de care se servesc specialiștii pentru calculul traectoriilor bombelor și construirea vizoarelor sunt în cea mai mare parte secrete și desigur că rezultatele experimentale i-au călăuzit de multe ori în rezolvarea acestor chestiuni.

Într'o primă aproximație, fenomenul căderii bombei revine la studiul mișcării centrului ei de greutate, deci a unui punct material de masă m, lansat cu o anumită viteză, egală cu cea a avionului, într'un mediu rezistent, sub acțiunea greutății Vom presupune că rezistența aerului este opusă vitezei $\vec{v}$ și că mărimea ei este o funcție de această viteză. Notând atunci cu $\vec{R}$ rezistența și cu $R(v)$ mărimea sa, vom avea $\vec{R} = -R(v)\vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ fiind vectorul unitate de pe tangenta la traectorie, orientat în sensul mișcării.

Se știe din Mecanică că traectoria punctului este plană. Vom lua ca axă Oy verticala punctului O de pe sol deasupra căruia se găsește avionul în momentul lansării bombei, iar ca axă Ox orizontala din acest plan, orientată în sensul mișcării avionului. Fie θ unghiul vitezei, deci al lui $\vec{\tau}$, cu Ox.

[1]) Referat făcut la 17 Iunie 1944 în cadrul Săptămânii Matematice a Facultății de Științe din Timișoara.

Ecuația de mișcare a punctului $m\vec{a} = m\vec{g} - R(v)\vec{\tau}$ unde $\vec{a}$ este accelerația sa și $\vec{g}$ accelerația gravității, proectată pe axe ne dă

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R(v)}{m}\cos\theta, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{R(v)}{m}\sin\theta.$$

Dar proectând și pe $\vec{v}$ pe axe, avem

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\theta,$$

așa că înlocuind în (1) se scoate ușor

$$(3)\qquad \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - \frac{R(v)}{m}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v}.$$

Prin împărțire membru cu membru, ecuațiile (3) ne dau

$$(4)\qquad \frac{dv}{d\theta} = v\left(\operatorname{tg}\theta + \frac{R(v)}{mg\cos\theta}\right).$$

Această ecuație diferențială ne definește pe v ca funcție de θ, cu condiția inițială $v = v_0$ pentru $\theta = \alpha$, notând cu α unghiul de sbor în picaj al avionului ($\alpha \leqslant 0$) în momentul lansării bombei, adică unghiul vitezei v_0 a avionului cu Ox.

Odată ecuația (4) integrată, vom avea derivatele coordonatelor x și y ale mobilului față de θ din ecuațiile (2) si (3), așa încât printr'o nouă integrare, obținem

$$(5)\qquad x = -\frac{1}{g}\int_\alpha^\theta v^2\,d\theta, \qquad y = -\frac{1}{g}\int_\alpha^\theta v^2\operatorname{tg}\theta\,d\theta + h,$$

notând cu h înălțimea avionului în momentul lansării bombei. Ecuațiile (5) ne definesc parametric traectoria mobilului, θ fiind apoi exprimat în funcție de t din a doua ecuație (3). Problema se reduce astfel la cuadraturi, îndată ce știm integra ecuația (4), numită uneori și ecuația hodografului.

Pe noi ne interesează în deosebi punctul de cădere a bombei pe sol. Abscisa sa va fi dată de

(6) $$X = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} v^2\, d\theta,$$

unde θ este dat de condiția $y = 0$, adică de

(7) $$h = \frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} v^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta.$$

Durata căderii bombei este egală cu

(8) $$T = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} \frac{v\, d\theta}{\cos\theta}.$$

θ fiind scos în funcție de h din (7). În practică, vom da diferite valori lui θ, vom face un tablou de valorile corespunzătoare ale lui X și h și prin interpolare vom deduce pe X în funcție de h.

2. *Cazul rezistenței proporționale cu pătratul vitezei.* Funcțiunea $R(v)$ este în general necunoscută și determinarea ei este o problemă de Aerodinamică extrem de dificilă, care a dat loc la cele mai delicate teorii. O aproximație destul de bună a lui $R(v)$ între anumite limite de viteză se obține luând $R(v) = mkv^2$, unde m este masa bombei, iar k un coeficient având dimensiunea inversului unei lungimi, care este definit de $k = \frac{i\Delta S}{p}$, Δ fiind greutatea specifică a aerului, S suprafața secțiunii maxime a bombei, perpendiculară pe direcția lui $\vec{v}$, iar p greutatea ei. Coeficientul i, fără dimensiuni, este dat de Aerodinamică; el depinde de forma bombei ca și de numărul lui *Reynolds*. Pentru o bombă sferică avem $i = 0{,}092$. Vom presupune că pentru bombele considerate avem $i \cong 0{,}05$. Atunci pentru bombe de greutate mijlocie (10—500 kg) k va fi situat între 10^{-5} și 10^{-4}, unitatea de lungime fiind metrul.

În cazul nostru ecuația (4) se integrează ușor și ne dă

(9) $$v^2 = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{\cos^2\theta\left[1 - \frac{2k}{g} v_0^2 \cos^2\alpha\,(\xi(\theta) - \xi(\alpha))\right]},$$

unde am notat cu $\xi(\theta)$ transcendenta lui *Euler*

$$\xi(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}, \qquad (\xi(\theta) = -\xi(-\theta)),$$

care intervine în balistică și pentru care există tabele de valori numerice pentru θ pozitiv și variind din 12′ în 12′. Cum dealungul traectoriei $\theta < 0$ vom face schimbarea de variabilă

(10) $$\operatorname{tg}\theta = -q, \quad (\operatorname{tg}\alpha = -q_0).$$

Se găsește imediat $2\xi(\theta) = -f(q)$, punând

(11) $$f(q) = q\sqrt{1+q^2} + \operatorname{Log}(q + \sqrt{1+q^2}).$$

De aici rezultă

(9′) $$v^2 = \frac{g}{k}\,\frac{1+q^2}{a + f(q) - f(q_0)},$$

unde

(12) $$a = \frac{g(1+q_0^2)}{k\, v_0^2}.$$

Vom avea apoi, făcând aceeași schimbare în (6), (7) și (8)

(6′) $$X = \frac{1}{k}\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{a + f(q) - f(q_0)},$$

(7′) $$h = \frac{1}{k}\int_{q_0}^{q} \frac{q\, dq}{a + f(q) - f(q_0)},$$

(8′) $$T = \frac{1}{\sqrt{gk}}\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{a + f(q) - f(q_0)}}.$$

În cazul sborului orizontal, avem $\alpha = q_0 = 0$ așa încât $f(q_0) = 0$.

3. *Procedee de calcul numeric.* Pentru calculul integralelor de mai sus pot fi întrebuințate diferite metode. *De Sparre*[1] propune următoarele aproximații: Să se înlocuiască $f(q)$ prin $2q(1+0{,}134\,q)$ în intervalul $0 \leq q \leq 1$ și prin $1 + q^2 + 0{,}36\,q$ pentru $1 < q$. În felul acesta integralele considerate se exprimă ușor cu ajutorul transcendetelor elementare.

O altă metodă de calcul, propusă de D-l *V. Vâlcovici*[2], revine la împărțirea intervalului (q_0, q) prin puncte de abscise numere întregi și la aproximarea lui $f(q)$ printr'o funcție liniară în fiecare din aceste intervale, ceeace conduce la transcendente logaritmice.

Metodele clasice a trapezelor, sau a lui *Simpson*

---

[1]) *De Sparre*, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 160, 1915, p. 584.

[2]) *V. Vâlcovici*, Annales scientifiques de l'Univ. de Jassy, t. 11, 1921, p. 52.

și *Côtes* permit calcule mai ușoare. Pentru aplicarea lor avem nevoe de un tablou cu valorile numerice ale lui $f(q)$. Vom putea deduce acest tablou din acela al lui $\xi(\theta)$ prin interpolare sau, pentru mai mare precizie, prin calcul direct. Se găsește astfel, cu erori mai mici ca 10^{-5},

q	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(q)$	0	0,505.160	1,040.229	1,630.647	2,295.584	3,248.569	3,898.927	4,853.135	5,915.634
q	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	
$f(q)$	8,311.654	11,305.278	14,685 904	18,587.132	22,953.305	27,806 317	33,151.893	38,988.339	

4. *Aplicație numerică.* Vom face calculele în ipotezele următoare:

I. $v_0 = 111{,}111$ m/sec (400 km/oră),
$\alpha = 0$ (sbor orizontal), $k = 8\,10^{-5}$.

Atunci din (12) rezultă $a = 9{,}929.2814$, iar formulele (6′) și (7′) ne conduc la următorul tablou de valori unitatea de lungime fiind metrul,

q	0,5	1	1,5	2	3	4	5
h	147,5	550,8	1144,2	1881,9	3581,4	5352,8	7061,5
X	599,6	1140,7	1617,5	2040,4	2726,8	3236.6	3618,2
X_{vid}	609,4	1177,6	1697,3	2176,8	3002,8	3671,2	4216,4

În ultima linie am trecut valorile pe cari le-ar avea X în vid, cari se obțin din formula cunoscută

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{13}$$

II. $v_0 = 99{,}38$ m/sec (357,768 km/oră),
$\alpha = 0$, $k = 10^{-4}$.

În acest caz avem tabloul

q	0,5	1	1,5	2	3	4	5
h	117,2	440,6	915,4	1505,5	2865,1	4282,2	5649,2
X	479,7	912,6	1293,9	1632,2	2181,4	2589,2	2894,6

5. *Corecții.* Rezultatele obținute nu ne dau decât o primă aproximație a realității, problema depinzând de mai mulți factori. Ele sunt mai puțin precise pentru valorile mai mari ale lui h. Într'adevăr, coeficientul k nu este constant ci depinde de y, căci greutatea specifică a aerului Δ variază cu înălmea. Apoi valorile pe cari le ia v conform lui (9′) pot depăși limita pentru care este legitim să socotim rezistența aerului ca proporțională cu v^2. Va mai trebui să ținem seamă, dacă h este mare, de variația lui g, a lui S, de umiditate, de vânt, etc. Din aceste motive calculul traectoriei prin arce parțiale se impune.

Fără a examina în parte diferitele corecții cari se impun din cauza factorilor semnalați, ne propunem doar să indicăm pe acelea ce rezultă dintr'o variație foarte mică δk a lui k, datorită necunoașterii exacte a valorii lui k adoptate în calcul. Din (6′) și (7′) deducem

$$\delta X = -\frac{\delta k}{k}\left[X - a\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{(a+f(q)-f(q_0))^2}\right],$$

$$\delta h = -\frac{\delta k}{k}\left[h - a\int_{q_0}^{q} \frac{q\,dq}{(a+f(q)-f(q_0))^2}\right],$$

de unde rezultă că δX și δh au semn contrar cu δk, deci pentru q fix, X și h descresc dacă k crește. Pe noi însă ne interesează variația lui X pentru h fix. Făcând calculele, rezultă

$$\frac{dX}{dk} = -\frac{1}{k^2}\int_{q_0}^{q}\left(1-\frac{q'}{q}\right)\frac{a(1-k)+f(q')-f(q_0)}{(a+f(q')-f(q_0))^2}\,dq' < 0;$$

deci, *dacă înălțimea h rămâne aceiași*, X *descrește dacă k crește*. Bineînțeles că am presupus că v_0 și α rămân invariabili. Corecția veritabilă asupra lui X dacă k variază cu dk, este deci

$$dX = -\frac{dk}{k}\left\{X - \frac{h}{q} - a\int_{q_0}^{q}\left(1-\frac{q'}{q}\right)\frac{dq'}{(a+f(q')-f(q_0))^2}\right\}. \tag{14}$$

în această formulă, ultimul termen din paranteză este mai mic decât $\frac{q^2 - q_0^2}{2aq}$, deci poate fi neglijat față de primii doi. Pentru exemplele considerate mai sus se va face în (14) $q_0 = 0$, $f(q_0) = 0$.

NOTE MATEMATICE

15. — *Einige numerische Identitäten.*

I.

(1) Wir bauen in die simultane Identität

$$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 \overset{4}{=} P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$$

Zahlen ein, welche einer Relation mit einer oder mehreren gleichen Potenzsummen genügen. Zu diesem Zwecke lösen wir die bezeichnete Identität nach folgender Methode.

Wir bilden eine Gleichung der Form

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$

wobei stets 5 Zahlen beliebig vorgegeben werden können. Hierbei beachten wir nur, dass

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_2 \text{ (Sume 2)} \neq y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = S_2'$$

und dass

$$S_3 \text{ (Summe 3)} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \neq y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = S_3'.$$

Hierauf bestimmen wir

$$K = \frac{2(S_3' - S_3)}{3(S_2 - S_2')}.$$

Es können nun hiebei zum Beispiel die x_i und 2 Glieder der y_i die gleiche, jedoch eine beliebige Potenz darstellen.

Numerisches Exempel: Aus der Gleichung

$$2^3 + 2^3 + 2^3 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 22$$

folgt

$$K = \frac{2(1536 - 10650)}{3(486 - 192)} = \frac{-62}{3}.$$

(2) Besteht die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$$

mit der Kondition, dass $S_2 \neq S_2'$ und $S_3 \neq S_3'$, dann gilt sofort die Identität

$$x_1, x_2, x_3, K - y_3, K - y_2, K - y_1 \overset{4}{=} y_2, y_2, y_3, K - x_3, K - x_2, K - x_1.$$

Somit ergibt das numerische Exempel unter (1) das Resultat (das negative Vorzeichen bei $\frac{-62}{3}$ kann unberücksichtigt bleiben)

$$2^3, 2^3, 2^3, \left(\frac{-4}{3}\right), \frac{59}{3}, \frac{59}{3} \overset{4}{=} 1^3, 1^3, 22, \frac{38}{3}, \frac{38}{3}, \frac{38}{3},$$

also bei Multiplikation der Basen mit 3^3 die Identität

$$6^3, 6^3, 6^3, (-36), 531, 531 \overset{4}{=} 3^3, 3^3, 594, 342, 342, 342.$$

Anderes Exempel: Aus 49+75+107=39+92+100 ergibt K = 96 (wenn wir die Zahlen nach Grösse ordnen) die Solution

$$\begin{cases} (-4),\ 4,\ 57,\ 49,\ 75,\ 107 \overset{4}{=} (-11),\ 21,\ 47,\ 39,\ 92,\ 100 \\ (-4)+4+57 = (-11)+21+47 \\ 49+75+107 = 39+92+100 \\ 49^5+75^5+107^5 = 39^5+92^5+100^5. \end{cases}$$

În ähnlicher Weise können wir die Identität

$$f_1, f_2, f_3, U^5, V^5, W^5 \overset{4}{=} g_1, g_2, g_3, X^5, Y^5, Z^5$$

lösen, indem wir $U^5, V^5, W^5, X^5, Y^5, Z^5$ vorgeben, nachdem wir sie errechneten (cf. „Wiskundige Opgaven met de Oplossingen", 1939, page 185, Groningen, Holland).

(3) Aus Vorstehendem ergibt sich durch einfache Überlegungen, dass

α) die Relation

$$C_1^v, C_2^v, C_3^v, D_1, D_2, D_3 \overset{4}{=} E_1^v, E_2^v, E_3^v, F_1, F_2, F_3$$

für beliebiges v in ganzen Zahlen lösbar ist;

β) sich in die Identität

$$\sum_{i=1}^{6} M_i^n = \sum_{i=1}^{6} P_i^n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, 4$$

nach dem heutigen Stande der Zahlentheorie jede Relation von der Form

$$A_1^n + A_2^n + A_3^n = B_1^n + B_2^n + B_3^n \quad \text{für } n < 7$$

in irgend einer Form ganzzahlig einbauen lässt.

Zwei numerische Exempel mögen hier noch angegeben werden. Wir bauen die Relation

$$\begin{cases} 7^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 8^2 \\ 7^4 + 7^4 = 3^4 + 5^4 + 8^4 \end{cases}$$

în der einfachen Form (das heisst: nur deren Basen) ein. [Über die Lösung dieser Relation cf. *A. Moessner:* „Numerische Identitäten" in „Boletin Matematico", 1934, 7 und *A. Moessner:* „On the Equation $A_1^n + A_2^n + \cdots + A_z^n = B_1^n + B_2^n + \cdots + B_z^n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) and allied Forms" in „The Mathematics Student", 1934, 3 (Madras)!].

Wir bestimmen aus $2 + 7 + 7 = 3 + 5 + 8$ die Zahl $K = -5$, setzen dafür (weil hier zulässig) 5 und bekommen die Solution

$$\begin{cases} 2,\ 7,\ \ 7,\ 2,\ 0,\ (-3) \overset{4}{=} 3,\ \ 5,\ \ 8,\ 3,\ (-2),\ -2) \\ 7^2 + 7^2 \qquad\qquad = 3^2 + 5^2 + 8^2 \\ 7^4 + 7^4 \qquad\qquad = 3^4 + 5^4 + 8^4. \end{cases}$$

Ein anderes numerisches Exempel sei aus

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 0 + 0 + 6^3$$

entwickelt. Es folgt daraus

$$K = \frac{2614248}{13103}$$

und somit das Resultat

$$\underline{3}^3,\ \underline{4}^3,\ \underline{5}^3,\ \frac{2614248}{13103},\ \frac{2614248}{13103},\ \frac{(-216000)}{13103} \overset{4}{=}$$

$$\underline{6}^3,\ \frac{976373}{13103},\ \frac{1775656}{13103},\ \frac{2260467}{13103},$$

welches bei Multiplikation der Basen mit 13103^3 ganzzahlig wird. (NB! Die unterstrichenen Zahlen bezeichnen die Ausgangsrelation).

Eine Lösung der Identität

$$G_1^v,\ G_2^v,\ G_3^v,\ H,\ H,\ J \overset{4}{=} L^v,\ Q,\ Q,\ Q \quad \text{für } v > 3$$

ist wohl unmöglich in rationalen Zahlen, da

$$R^n = T_1^n + T_2^n + T_3^n \quad \text{für } n > 3$$

rational unmöglich zu sein scheint.

ALFRED MOESSNER
(NÜRNBERG, GERMANIA)

---

16. — *Asupra rezolvării în numere întregi a ecuațiunilor de forma*

$$x^{2m+1} = a \cdot y^2 + b,$$

a, b, m fiind întregi pozitivi.

Se observă că avem

$$x > \sqrt[2m+1]{b} \quad \text{și} \quad x^m < |y| < x^m \sqrt{x}.$$

Vom pune atunci

$$y = x^m + \alpha, \quad \text{unde} \quad 0 < \alpha < x^m (\sqrt{x} - 1).$$

Deci vom avea

$$f(x, \alpha) \equiv x^{2m+1} - a(x^m + \alpha)^2 - b.$$

Dăm apoi lui α valori dela *1* la $[x^m \cdot (\sqrt{x} - 1) - 1]$ și studiem funcția $f(x, \alpha)$, examinând valorile ei față de *0*, pentru diferitele valori date lui x.

Se observă că dacă $a > x$, atunci $f(x, \alpha) < 0$, deci nu are soluții.

Iată acum două exemple:

1. *Fie ecuația* $x^3 = y^2 + 2$ (ecuația lui *Fermat*). Avem

$$x > 1 \quad \text{și} \quad x < |y| < x\sqrt{x}.$$

Punem deci

$$y = x + \alpha, \quad \text{unde} \quad 0 < \alpha < x(\sqrt{x} - 1).$$

Avem

$$f(x, \alpha) \equiv x^3 - (x + \alpha)^2 - 2.$$

Deci

α	1		2			$< x$		x		$x(\sqrt{x}-1)-1$	
x	≤ 2	> 2	< 3	$= 3$	> 3	< 2	> 3	< 5	> 5	$= 1$	≥ 2
$f(x, \alpha)$	< 0	> 0	< 0	$= 0$	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

Rezultă dar că nu avem decât soluția

$$x=3 \quad \text{și deci} \quad y=5.$$

2. *Fie ecuația* $x^5=2y^2+1$. Avem

$$x\geq 1 \quad \text{și} \quad x^2<|y|<x^2\sqrt{x}.$$

Punem deci

$$y=x^2+\alpha, \quad \text{unde} \quad 0<\alpha<x^2(\sqrt{x}-1).$$

Deci

$$f(x,\alpha)\equiv x^5-2(x^2+\alpha)-1.$$

Rezultă tabloul

α	1		2			3		x^2		$x^2(\sqrt{x}-1)-1$	
x	≤ 2	>2	<3	$=3$	>3	≤ 3	>3	≤ 8	>8	$=1$	>1
$f(x,\alpha)$	<0	>0	<0	$=0$	>0	<0	>0	<0	>0	$=0$	>0

Rezultă dar soluțiuniile

x	1	3
y	0	11

COMANDOR I. LINTES

17. — *Aufgaben aus der unbestimmten Analysis.*

1. In AB = CD, so folgt

$$A^{2xy}+B^{2xy}+C^{2xy}+D^{2xy}=(A^{xy}+B^{xy})^2+(C^{xy}-D^{xy})^2=(A^{xy}-B^{xy})^2+(C^{xy}+D^{xy})^2.$$

Es gilt

$$A=2,\ B=3,\ C=1,\ D=6,\ x=1,\ y=3,$$

$$1^6+2^6+3^6+6^6=35^2+215^2=19^2+217^2=47450,$$

$$A=2,\ B=6,\ C=3,\ D=4,\ x=4,\ y=2,$$

$$2^{16}+3^{16}+4^{16}+6^{16}=1679872^2+58975^2=1679360^2+72097^2=2825447987009,$$

$$A=12,\ B=5,\ C=10,\ D=6,\ x=2,\ y=1,$$

$$5^4+6^4+10^4+12^4=8^4+13^4=17^2(7^2+8^2)=32657.$$

2. Die Gleichungen

$$\begin{cases} x+y=A^2, \\ x^2+y^2=B^2 \end{cases}$$

haben die Lösungen

$$\begin{cases} x=(\alpha^2+2\beta^2)(\alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2), \\ y=4\alpha\beta(\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2), \\ A=\alpha^2-2\beta^2, \\ B=(\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2. \end{cases}$$

$\alpha=2,\ \beta=1:\ 16-12=2^2,\ 16^2+12^2=20^2,$

$\alpha=4,\ \beta=1:160+36=14^2,\ 160^2+36^2=164^2,$

$\alpha=5,\ \beta=1:340+189=23^2,\ 340^2+189^2=389^2,$

JOHANNES MAHRENHOLZ

18. — *Sur les points de Feuerbach.*

Soient (O, R), $(O_9, \frac{R}{2})$, (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), les cercles circonscrit, des neuf points et tritangents exinscrits d'un triangle ABC, d'orthocentre H; φ_a, φ_b, φ_c les points de *Feuerbach* relatifs aux cercles (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c).

Appliquant le théorème de *Stewart* au triangle $O O_9 I_a$, de l'égalité

$$\overline{O_9\varphi_a}\cdot\overline{O I_a}^2+\overline{\varphi_a I_a}\cdot\overline{O O_9}^2=\overline{O_9 I_a}\cdot\overline{O\varphi_a}^2+\overline{O_9\varphi_a}\cdot\overline{\varphi_a I_a}\cdot\overline{O_9 I_a},$$

il résulte que

$$(1)\qquad \overline{O\varphi_a}^2=R^2+\left(\frac{\overline{O I_a}^2-R^2}{2\overline{O I_a}^2}\right)\cdot(\overline{OH}^2-\overline{O I_a}^2),$$

et l'on a des formules analogues pour $\overline{O\varphi_b}^2$, $\overline{O\varphi_c}^2$.

En vertu du théorème de la médiane appliqué au triangle $\varphi_a O H$, il vient aussi

$$\overline{H\varphi_a}^2=\frac{1}{2}(\overline{OH}^2+R^2)-\overline{O\varphi_a}^2,$$

et il y a des relations similaires pour $\overline{H\varphi_b}^2$, $\overline{H\varphi_c}^2$.

Lorsque $OH=O I_a$, on a, à la fois, $O\varphi_a=R$, $H\varphi_a=\varrho$, ϱ étant le rayon du cercle conjugué au triangle fondamental.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'un des points de Feuerbach* φ_a, φ_b, φ_c, *soit sur le cercle circonscrit est que le centre de cercle*

soit équidistant de l'orthocentre et du centre du cercle exinscrit sur lequel il est situé. Ce point de Feuerbach est, en outre, sur le cercle conjugué au triangle fondamental.

En particulier, c'est le cas du triangle spécial où $A=\frac{4\pi}{7}$, $B=\frac{2\pi}{7}$, $C=\frac{\pi}{7}$, pour lequel le point φ_c est, à la fois, sur les cercles conjugué et circonscrit au triangle ainsi que sur le cercle de *Monge* du cercle (O, R)[1].

V. THÉBAULT
TENNIE (SARTHE-FRANCE)

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ADMITERE IN POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA, Iulie 1944

GEOMETRIE.

În raport cu două axe perpendiculare Ox, Oy se iau punctele $A(\alpha, 0)$, $B(0, a)$, $C(0, b)$. Se consideră cercul circumscris triunghiului ABC și se cere:

1. Locul geometric al intersecției tangentelor în B și C la acest cerc când α variază. Să se dea o explicație geometrică rezultatului.

2. Presupunem α fix. Se consideră pe cerc un punct variabil $M(x_0, y_0)$; dreapta OM taie a doua oară cercul în N. Se cere locul geometric al intersecției tangentelor în M și N la cerc, când M descrie cercul.

3. Să se arate că acest loc trece printr'un punct fix, când α variază. Să se explice rezultatul geometric.

(5 Iulie, orele 12—14).

GEOMETRIE (chestiuni de oral).

Se consideră o sferă și perpendicular pe mijlocul unei raze OA se duce un plan care taie sfera după un cerc (C) în care latura patratului înscris are drept lungime a. Se prelungește raza OA până înțeapă a doua oară sfera în B și se cere volumul conului care are vârful în B și drept bază cercul (C).

II.

În triunghiul ABC fie D piciorul înălțimei vârfului A și M, N proecțiile lui D pe AC, AB. Să se arate că dreapta MN este paralelă cu tangenta în A la cercul circumscris triunghiului.

III.

Se consideră două axe perpendiculare Ox, Oy. Pe Ox se iau punctele M și N. Prin M ducem o dreaptă variabilă ce taie pe Oy în P. Paralela dusă prin M la Oy cu paralela dusă prin P la Ox se taie în Q și fie Q' mijlocul segmentului MQ. Dreapta NQ' taie pe Oy în P', iar MP' taie pe PN în R. Să se arate că R împarte segmentul PN într'un raport constant a cărui valoare să se calculeze.

Ce putem spune despre locul lui R?.

(5 Iulie, orele $14^1/_2 - 16^1/_2$).

ALGEBRĂ.

I.

Să se determine a, b, c astfel ca derivata funcției

(1) $y=\operatorname{arctg}(1+2x)+\log(1+2x+2x^2)+\frac{ax^4+bx+c}{2x^2+2x+1}$.

să se anuleze pentru $x=-1$, $x=0$ și $x=1$.

Să se precizeze pentru fiecare din aceste valori, dacă funcția (1) este maximă, sau minimă.

Să se arate, că pentru valorile găsite pentru a, b, c derivata, mai are două rădăcini imaginare.

(Simbolul log, înseamnă logaritm neperian.)

II.

Să se determine toate valorile lui m și n reale, sau imaginare, astfel ca ecuația

$$x^4 - mx^3 + 5x^2 + 4mx + n^3 = 63.$$

să aibă o rădăcină dublă și alte două rădăcini, egale și de semne contrare. Înlocuind m și n cu valorile găsite, să se rezolve ecuația dată.

(6 Iulie, orele 12—14).

ALGEBRĂ (chestiuni de oral).

I.

Să se rezolve inecuația

$$\frac{3x^2-2x+1}{2x+3} < 0.$$

II.

Să se calculeze derivata funcției

$$y=\operatorname{arctg}\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}.$$

Care este funcția z care are aceiași derivată? Să se arate apoi direct că diferența $y-z$ este o constantă. (Se dă $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$).

III

Să se calculeze limita expresiei

$$\frac{x^x - x}{x-1},$$

când $x \to 1$.

IV.

Se dă relația

$$9xy^3 - x^2y^2 + 3xy + 5 = 0,$$

care definește pe y ca funcție implicită de x. Să se calculeze valorile lui y, pentru $x=3$. Să se calculeze apoi valoarea derivatei y', pentru $x=3$. (Se va calcula numai valoarea reală a derivatei).

(6 Iulie, orele $14^1/_2$—$16^1/_2$).

---

[1]) Nous avons donné d'autres propriétés de ce curieux triangle (*Mathesis*, 1913—204 et 1938—169). (*V. T.*)

TRIGONOMETRIE.

I.

Să se rezolve şi discute sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b, \end{cases}$$

unde $a > 0$, $b > 0$.

II.

Să se determine relaţia dintre x şi y, daţi de ecuaţiile

$$\begin{cases} 2x \cos a + y \sin a = 1 \\ x \sin a - 2y \cos a + \frac{3}{2} \sin a \cos a = 0, \end{cases}$$

unde a este un parametru variabil.

Presupunând că x şi y sunt coordonatele unui punct M din plan, să se spună care este locul lui M, reprezentat prin relaţia aflată?

III

Să se rezolve un triunghiu A B C, cunoscând latura $BC = a$, înălţimea $AA_1 = h$, precum şi bisectoarea $AA_2 = \alpha$, exprimându-se, în prealabil, unghiul A_1AA_2 în funcţie de unghiurile triunghiului ABC. Discuţie.

(7 Iulie, orele 12—14).

TRIGONOMETRIE (chestiuni de oral).

I.

Cunoscându-se $\sin x = \sqrt{2} - 1$, să se afle $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{cotg} 2x$.

II.

Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresia

$$E = \sin A + \sin B - \sin C,$$

în care $A + B + C = 180^0$.

III.

Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu cunoscând ipotenuza a şi înălţimea corespunzătoare h.

IV.

Să se rezolve ecuaţia

$$2 \sin x + 2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

şi să se determine toate arcele cuprinse între 0 şi π.

(7 Iulie, orele $14^1/_2 - 16^1/_2$).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, No. 10, Iunie 1944. Indicatorul unei sume, de Comandor *I. Linteş*. Asupra dreptei *Wallace-Simson*, de *Mircea D. Popa*. Asupra hipocicloidei cu trei puncte de înapoiere, de *Şerban Gheorghiu*. Consideraţiuni asupra rezolvării ecuaţiei lui *Laplace* în coordonate toroidale, de *T. Vescan*. Raport asupra premiului „*V. Cristescu*", de Prof. *Alexandru V. Niculescu*, Prof. *Al. Pantazi*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *N. Abramescu. Lecţiuni de Geometrie Analitică urmate de întroducere elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene şi noţiuni elementare de geometrie vectorială.*

Este un volum de 624 p., apărut în a 3-a ediţie, în editura Universităţii din Cluj-Sibiu, ce cuprinde multe adăogiri şi îmbunătăţiri.

Acest volum devenit clasic, încă de la primele sale ediţii, este astăzi cartea de bază a studenţilor de la Ştiinţe şi a profesorilor de matematici. Munca titanică şi ordonată izvorâtă din marea dragostea de ştiinţă şi de şcoală a distinsului profesor *Abramescu*, precum şi dorinţa sa fără margini de a cuprinde cât mai multe şi variate cunoştinţi din domeniul Geometriei Analitice şi alte domenii învecinate, fac ca şcoala şi ştiinţa românească să-i aducă prinos de laudă şi recunoştinţă şi să admire această operă nemuritoare, care î-i va vecinici numele

3. Comandor Dr. Ing. *I. Linteş*. Le problème de la pénétration des projectiles dans un obstacle et de la préparation des blindajes. (Extrait du „Bulletin de L'École Polytechnique de Bucurest", XIV-ème, 1943, No. 1—2).

4. *Comandor Dr. Ing. I. Linteş*. Realizările tehnice în arteleria română în decursul timpului. (1943).

5. Dr. *M. G. Filipescu*. Importanţa Geologiei în cariera ingenerească. (Prelegere înauguralâ la deschiderea cursurilor Politehnicei din Timişoara, 7 Noemvrie 1943).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1037. — *Să se stabilească identitatea*

$$\frac{\sin(3\alpha_1+\alpha) + 2\sin(2\alpha_1+2\alpha) + \sin(\alpha_1+3\alpha)}{\sum_{\lambda=0}^{4} C_4^{\lambda} \sin[(4-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha]} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\alpha_1}{2}}.$$

V. ALACI

Soluţie. Notând cu E primul membru şi transformând sumele de sinusuri în produse, putem scri succesiv

$$E = \frac{[\sin(3\alpha_1+\alpha) + \sin(\alpha_1+3\alpha)] + 2\sin(2\alpha_1+2\alpha)}{(\sin 4\alpha_1 + \sin 4\alpha) + 4[\sin(3\alpha_1+\alpha) + \sin(\alpha_1+3\alpha)] + 6\sin(2\alpha_1+2\alpha)} =$$

$$\frac{2\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha) + 2\sin(2\alpha_1+2\alpha)}{2\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos(2\alpha_1-2\alpha) + 8\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha) + 6\sin(2\alpha_1+2\alpha)}.$$

Simplificând prin $2\sin(2\alpha_1+2\alpha)$, avem urmărind cu atenţie,

$$E=\frac{\cos(\alpha_1-\alpha)+1}{\cos(2\alpha_1-2\alpha+4\cos(\alpha_1-\alpha)+3}=$$

$$\frac{2\cos(\alpha_1-\alpha)+1}{2\cos^2(\alpha_1-\alpha)-1+4\cos(\alpha_1-\alpha)+3}=$$

$$\frac{\cos(\alpha_1-\alpha)+1}{2[\cos(\alpha_1-\alpha)+1]^2}=\frac{1}{2[\cos(\alpha_1-\alpha)+1]}=$$

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}}.$$

Avem astfel stabilită identitatea cerută.

Au dat soluţii bune, d-nii *Modâlcă S. Emil* (Lic. T-Severin) şi *Tilică C. Ştefan* (Lic. T-Severin).

Problema 2077. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x+y+xy=a \\ (x^2+y^2+x^2y^2)(x+y)(xy-1)=b. \end{cases}$$

LT ADRIAN POPESCU

Soluţie. Observând că primul factor din ecuaţia 2-a se poate scri

$$x^2+y^2+x^2y^2=(x+y)^2+(xy-1)^2-1$$

şi notând

$$(1)\qquad \begin{cases} x+y=u \\ xy-1=v, \end{cases}$$

sistemul dat devine

$$(2)\qquad \begin{cases} u+v=a-1 \\ (u^2+v^2-1)uv=b. \end{cases}$$

Fiindcă factorul

$$u^2+v^2-1=(u+v)^2-2uv-1,$$

sistemul (2), ţinând seamă de prima sa ecuaţie, devine

$$\begin{cases} u+v=a-1 \\ [(a-1)^2-2uv-1]uv=b. \end{cases}$$

Ecuaţia 2-a a acestui sistem, desvoltată, este

$$2u^2v^2-a(a-2)uv+b=0,$$

de unde deducem

$$uv=\frac{a(a-2)\pm\sqrt{a^2(a-2)^2-8b}}{4}=A_k,\quad (k=1,2).$$

unde cu A_1 şi A_2 am notat pentru prescurtare cele două valori ale lui uv.

Sistemul (3) devine astfel

$$\begin{cases} u+v=a-1 \\ uv=A_k, \qquad (k=1,2). \end{cases}$$

Rezultă de aci că u şi v sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea

$$z^2-(a-1)z+A_k=0,$$

ceea ce ne dă

$$z=\frac{a-1\pm\sqrt{(a-1)^2-4A_k}}{2}=B_k,\quad (k=1,2),$$

unde cu B_1 şi B_2 am notat iarăşi pentru prescurtare, cele două valori ale lui z, sau ale lui u şi v. Având u şi v şi ţinând seamă de notaţiile din (1), rezultă că sistemul dat este echivalent cu sistemele

$$\begin{cases} x+y=B_1 \\ xy=B_2, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x+y=B_2 \\ xy=B_1. \end{cases}$$

Având acum cunoscute suma şi produsul necunoscutelor x, y, putem forma uşor ecuaţiile de gradul al 2-lea ale căror rădăcini sunt x şi y.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin* (Lt), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Lt., Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Păläceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2081. — *Intr'un triunghiu* ABC, *în care notaţiile sunt cele obicinuite, să se arate că avem relaţiile:*

$$c^3=b^3\cos 3A+a^3\cos 3B+3abc\cos(A-B),$$

$$b^3\sin 3A-a^3\sin 3B+3abc\sin(A-B)=0,$$

$$b^6+c^6-a^6-9a^2b^2c^2=2b^3c^3\cos 3A-6a^4bc\cos(C-B).$$

V. ALACI

Soluţie. Vom stabili pe rând relaţiile cerute:

1. Conform teoremei cosinusului, avem

$$c=b\cos A+a\cos B,$$

relaţie care ridicată la cub ne dă

$$c^3=b^3\cos^3A+a^3\cos^3B+$$
$$3ab\cos A\cos B(b\cos A+a\cos B),$$

sau

$$(1)\quad c^3=b^3\cos^3A+a^2\cos^3B+3abc\cos A\cos B.$$

În baza relațiilor cunoscute

$$\cos^3 A = \cos 3A + 3\sin^2 A \cos A,$$
$$\cos^3 B = \cos 3B + 3\sin^2 B \cos B,$$

relația (1) devine

(2) $c^3 = b^3 \cos 3A + a^3 \cos 3B + 3b^3 \sin^2 A \cos A + 3a^3 \sin^2 B \cos B + 3abc \cos A \cos B.$

Cum din teorema sinusurilor avem încă cunoscut

(3) $$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

relația (2) se poate scri succesiv

$$c^3 = b^3 \cos 3A + a^3 \cos 3B + 3ab^2 \sin A \sin B \cos A + 3a^2 b \sin A \sin B \cos B + 3abc \cos A \cos B$$
$$= b^3 \cos 3A + a^3 \cos 3B + 3ab \sin A \sin B (b \cos A + a \cos B) + 3abc \cos A \cos B$$
$$= b^3 \cos 3A + a^3 \cos 3B + 3abc (\sin A \sin B + \cos A \cos B),$$

sau,

$$c^3 = b^3 \cos 3A + a^3 \cos 3B + 3abc \cos (A - B)$$

și avem astfel stabilită prima din relațiile cerute.

2. Conform teoremei sinusurilor, avem

$b \sin A = a \sin B$, sau (4) $b^3 \sin^3 A = a^3 \sin^3 B.$

Cum avem cunoscute relațiile

$$\sin^3 A = 3 \sin A \cos^2 A - \sin 3A,$$
$$\sin^3 B = 3 \sin B \sos^2 B - \sin 3B,$$

relația (4) devine

$$3b^3 \sin A \cos^2 A - b^3 \sin 3A = 3a^3 \sin B \cos^2 B - a^3 \sin 3B,$$

sau

(5) $$b^3 \sin 3A - a^3 \sin 3B + 3a^3 \sin B \cos^2 B - 3b^3 \sin A \cos^2 A = 0.$$

Dar având cunoscute încă relațiile

$$a \sin B = b \sin A, \qquad b \cos A + a \cos B = c,$$

egalitatea (5) se poate scri succesiv,

$$b^3 \sin 3A - a^3 \sin 3B + 3a \sin B (a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A) = b^2 \sin 3A - a^3 \sin 3B +$$
$$3a \sin B (a \cos B + b \cos A)(a \cos B - b \sin A) =$$
$$b^3 \sin 3A - a^3 \sin 3B + 3ac \sin B (a \cos B - b \cos A) = 0,$$

sau

$$b^3 \sin 3A - a^3 \sin 3B + 3a^2 c \sin B \cos B - 3abc \sin B \cos A = b^3 \sin 3A - a^3 \sin 3B + 3abc (\sin A \cos B - \sin B \cos A) = 0$$

și în definitiv putem scri

$$b^3 \sin 3A - a^3 \sin 3B + 3abc \sin (A - B) = 0.$$

Avem stabilită astfel a 2-a din relațiile cerute.

3. Considerăm prima dintre relațiile stabilite și pe acelea ce se obțin prin permutări circulare, adică

$$c^3 = b^3 \cos 3A + a^3 \cos 3B + 3abc \cos (A - B),$$
$$a^3 = c^3 \cos 3B + b^3 \cos 3C + 3abc \cos (B - C),$$
$$b^3 = a^3 \cos 3C + c^3 \cos 3A + 3abc \cos (C - A)$$

și le înmulțim respectiv cu c^3, $-a^3$, b^3, iar apoi adunăm aceste relații, obținem

$$b^6 + c^6 - a^6 = 2b^3 c^3 \cos 3A + 3abc [c^3 \cos (A - B) + b^3 \cos (C - A) - a^3 \cos (B - C)],$$

$$b^6 + c^6 - a^6 = 2b^3 c^3 \cos 3A + 3abc [a^3 \cos (B - C) + b^3 \cos (C - A) + c^3 \cos (A - B) - 2a^3 \cos (B - C)],$$

sau

(6) $$b^6 + c^6 - a^6 = 2b^3 c^3 \cos 3A - 6a^4 bc \cos (B - C) + 3abc \Sigma a^3 \cos (B - C).$$

În continuare, folosim identitatea

$$\Sigma \sin^3 A \cos (B - C) = 3 \sin A \sin B \sin C$$

stabilită în „Relations entre les éléments d'un triangle" (2-me édition, *Vuibert* et *Nony*, éditeurs, p. 130) și având în vedere relațiile cunoscute

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ea devine

$$\Sigma a^3 \cos (B - C) = 3abc.$$

Ținând seamă de această identitate, ultimul termen din relația (6) devine $9a^2 b^2 c^2$, pe care trecându-l în primul membru, obținem

$$b^6 + c^6 - a^6 - 9a^2 b^2 c^2 = 2b^3 c^3 \cos 3A - 6a^4 bc \cos (C - B).$$

Avem astfel stabilită a 3-a dintre identitățiile cerute.

Soluții bune date de d-nii: *Bitang Alexandru* (Polit., Timișoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit.,

Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu S. Antim* (Polit., Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

D-nii *Constantinescu N. Ilie* (Polit., Timişoara) şi *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic. Tg-Jiu), au dat soluţii folosind cunoştinţi din articolul autorului problemei, intitulat „Relaţii metrice într'un triunghiu", R M. T., Vol. XXIII, p. 80.

Problema 2114. *Să se găsească un număr de cinci cifre, astfel ca numărul format de ultimele trei cifre să fie un multiplu al celui format de primele două, iar numărul căutat să fie produsul a doi factori, unul de două cifre şi altul de trei, al doilea obţinându-se din primul prin intercalarea unui zero între cifrele sale.*

M GHERMANESCU

Soluţie. Fie N numărul căutat, A numărul format cu primele sale două cifre, iar B numărul format cu ultimele sale trei cifre. După enunţ, avem $B = mA$, apoi

$$(1)\quad N = 1000A + B = (1000 + m)A = (10x + y)(100x + y),$$

unde $m < 100$, iar x şi y sunt numere de o cifră. De oarece N are cinci cifre, rezultă $x \geqq 3$. Din expresia ultimei părţi a egalităţii de mai sus, se vede că N nu poate fi par fără a se divide prin 4, nu se poate divide prin 3, fără a se divide prin 9, nu se poate divide prin 5 fără a se divide prin 25, nu se poate divide prin 27 fără a se divide prin 81, etc. căci ambii factori $10x + y$, $100x + y$ sunt simultan pari sau divizibili prin 3, 5, etc.

Mai observăm că (1) se poate încă scrie

$$(2)\quad 1000(A - x^2) = y^2 + 110xy - mA,$$

care arată, în primul rând, că membrul al doilea este divizibil prin 1000. Cum x şi y sunt cel mult egale cu 9, iar $mA = B$ are cel mult trei cifre, rezultă că membrul al doilea poate fi cel mult egal cu 8000; pe de altă parte, dacă este negativ, este superior lui -1000, iar divizibilitatea prin 1000 arată că este cel puţin nul. Rezultă deci

$$(3)\quad 0 \leqq A - x^2 \leqq 8.$$

Vom examina pe rând diferitele cazuri posibile, dând valori lui x.

1°. $x = 3$, deci $A = 9, 10, \ldots 17$, iar (1) devine

$$(1_1)\quad N = (1000 + m)A = (30 + y)(300 + y).$$

Când $A = 9$, $N < 10.000$; când $A = 10$, $y = 0$, $N = 9000 < 10.000$; când $A = 11$, $y = 3$ sau 8, $N = 9.999$ sau 11.704, cu soluţia

$$N = 11.704 = 38 \times 308, \quad 704 = 64 \times 11;$$

când $A = 12$, ambii factori din membrul al doilea (1_1) sunt pari şi divizibili prin 3, deci $y = 6$, cu $N = 11.016$, care nu este soluţie; când $A = 13$, $y = 9$ cu 12.051, care nu este soluţie, când $A = 14$, $y = 8$, cu 11.704 inadmisibil; când $A = 15$, $y = 5$, cu 10.675 care nu este soluţie; când $A = 16$, $y = 8$; când $A = 17$, $y = 4$ sau 6, cu 10.336, 11.016, care nu sunt soluţii.

2°. $x = 4$, deci $A = 16, 17, \ldots, 24$, iar (1) devine

$$(1_2)\quad N = (1000 + m) = (40 + y)(400 + y).$$

Când $A = 16$, $y = 0, 4, 8$, cu 16 000, 17.776, 19.584, soluţie fiind 16.000; când $A = 17$, $y = 8$, cu 19 584, care nu este soluţie; când $A = 18$, $y = 2$ sau 8, cu 16.884, 19.584, care nu sunt soluţii; când $A = 19$, membrul al doilea este prin cu y; când $A = 20$, $y = 0$, fără soluţie; când $A = 21$, $y = 2$ sau 8, fără soluţie; când $A = 22$, $y = 4$, fără soluţie; când $A = 23$, $y = 6$, fără soluţie; când $A = 24$, $y = 8$, fără soluţie.

Pe aceiaş cale, examinăm valorile $x = 5, 6, 7, 8, 9$; găsim, în definitiv, soluţiile

11.704, 16.000, 25.000, 26.104, 27,216, 28.336,

29.464, 36.000, 49.000, 64.000, 81.000, 82.984,

în număr de 12.

Notă. 1°. La această problemă s'au trimis soluţii prin incercări. Cu toată această metodă infailibilă, ce consta în a face toate produsele de forma $xy \times x0y$, Dl *I. Pupezescu* a găsit numai 8 soluţii, printre care 38.656 şi 81.991, care nu sunt soluţii.

2°. Odată stabilite egalitatea (2) şi neegalitatea (3), putem conduce şi altfel raţionamentul, examinând succesiv valorile diferenţei $A - x^2$.

a. $A = x^2$. Cum $B = mA$, (2) devine

$$B = 110xy + y^2,$$

în care vom da lui x valorile $3, 4, \ldots, 9$ iar lui y valorile $0, 1, 2, \ldots, 9$, astfel ca B să aibă trei cifre; găsim tabloul

x	3	4	5	6	7	8	9	3	3	4
y	1	1	1	1	1	1	1	2	3	2
A	9	16	25	36	49	64	81	9	9	16
B	334	441	551	661	771	881	991	664	999	884

,

din care numai B = 999 este divizibil prin A=9, dar duc la N=9999 care nu are cinci cifre şi pe care l-am putea considera ca o soluţie formală 09999.

b. $A = x^2 + 1$. (2) devine

$$B = 110\,xy + y^2 - 1000,$$

care conduce la tabloul

x	5	6	7	8	9	3
y	2	2	2	2	2	3
A	26	37	50	65	82	10
B	104	324	544	764	984	899

din care numai B = 104 se divide prin A = 26, dând soluţia 26.104 şi B = 984 se divide prin A = 82, dând soluţia 82.984.

La fel examinăm celelalte cazuri

$$A - x^2 = 2, 3, 4, \ldots, 8.$$

M. G.

PROBLEME PROPUSE

2249. — Să se găsească numărul de trei cifre abc al cărui patrat se scrie numai cu cifrele a şi c.

G-L GH. BUICLIU

2250. — Să se arate că

$$\frac{5\,C_4^0}{1.2.3.4} + \frac{7\,C_4^1}{2.3.4.5} + \frac{9\,C_4^2}{3.4.5.6} + \frac{11\,C_4^3}{4.5.6.7} + \frac{13\,C_4^4}{5.6.7\,8} =$$

$$\frac{C_5^0}{1.2.3} + \frac{C_5^1}{2.3.4} + \frac{C_5^2}{3.4.5} + \frac{C_5^3}{4.5.6} + \frac{C_5^4}{5.6\,7} + \frac{C_5^5}{6.7.8}.$$

M. NEUMANN

2251. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3(x^4+y^4) + 10x^2y^2 - 8xy(x^2+y^2) = 0 \\ (x^3+y^3)^4 - 4(x^3+y^3)^3 + 8(x^3+y^3) + 3 = 0. \end{cases}$$

C-TIN TINCU

2252. — Să se determine a, b, c astfel ca derivata funcţiei

$$y = \operatorname{arctg}(1+2x) + \log(1+2x+2x^2) + \frac{ax^4+bx+c}{2x^2+2x+1},$$

să se anuleze pentru $x = -1$, $x = 0$ şi $x = 1$.

Să se precizeze pentru fiecare din aceste valori, dacă funcţia este maximă sau minimă. Să se arate, că pentru valorile găsite pentru a, b, c, derivata, are şi două rădăcini imaginare.

(Simbolul log, înseamnă logaritm neperian).

V. ALACI

2253. — Să se calculeze minimul sumei,

$$S = x + 3xy + 5xyz,$$

ştiind că

$$x^3 y^5 z^7 = a, \quad (a \text{ constant}).$$

AL. TIGANOIU

2254. — Într'un tetraedru ABCD, unde dreapta OG unind centrul sferei circumscrise cu centrul său de greutate întâlneşte planele feţelor BCD, CDA, DAB, ABC în A', B', C', D', avem relaţia

$$\frac{A'O}{A'G} + \frac{B'O}{B'G} + \frac{C'O}{C'G} + \frac{D'O}{D'G} = 4.$$

V. THÉBAULT

2255. — Dintr'un punct A se duc la o parabolă tangentele AB, AC. Să se afle:

1° Ecuaţia iperbolei echilatere care trece prin A, B, C şi care taie parabola în două puncte simetrice faţă de axa parabolei.

2° Să se arate că oricare ar fi A pe o perpendiculară Δ la axa parabolei, această iperbole trece prin patru puncte fixe.

3° Să se afle locul centrelor acestor iperbole, când A variază pe Δ.

N. ABRAMESCU

2256. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{1+\cos^2 2x}{1+\cos 2x} = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

MARCEL AMARASTEANU

ŞCOALA POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA

LISTA

Candidaţilor reuşiţi la examenul de admitere în Politehnică în ordinea clasificaţiei.
(5—8 Iulie 1944)

1. *Colan G. Horia,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
2. *Appeltauer A. Iosif,* Lic. Piarist, Timişoara.
3. *Brăescu I. Leonida,* Lic. Bălcescu, Brăila.
4. *Chesaru P. Cristea,* Lic. Bălcescu, Brăila.
5. *Rădescu C. Constantin,* Lic Princip. Nicolae, Sighişoara.
6. *Nicolescu D. Lazăr Gh.,* Lic. N. Bălcescu, Brăila.
7. *Bălan I. Dumitru,* Lic. Ştefan cel Mare, Suceava.
8. *Kvatsak C. Carol,* Lic. Piarist, Timişoara.
9. *Simese Elemer Carol,* Lic. C. Brediceanu, Lugoj.
10. *Enăchescu G. Ioan,* Lic. N. Bălcescu, Brăila.
11. *Filoneanu M. Leonid,* Lic. Alecu Russo, Chişinău.
12. *Işvan P. Teofil,* Lic. Carol, Vârşeţ.
13. *Pecula N. Marius Sabin,* Lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
14. *Siclovan S. Lucian,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
15. *Staneiu A. Petre,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
16. *Trica G. Eugen,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
17. *Alexa Al. Gheorghe,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
18. *Spiropol G. Spiro,* Lic. N. Bălcescu, Brăila.
19. *Bolcaş A. Victor,* Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
20. *Papondof T. Constantin,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
21. *Sulea G. Gheorghe,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
22. *Cândea C. Radu,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
23. *Cosma V. Constantin,* Lic. M. Kogălniceanu, Vaslui.
24. *Melnic A. Vladimir,* Lic. C. Negruzzi, Iaşi.
25. *Mihuţiu G. Adrian,* Lic. Decebal, Deva.
26. *Bobeica R. Constantin,* Lic. N. Bălcescu, Brăila.
27. *Vârlan I. Valeriu,* Lic. B. P. Haşdeu, Chişinău.
28. *Burlacu I. Eugeniu,* Lic. Alecu Russo, Chişinău.
29. *Ovesea I. Nicolae,* Lic. N. Bălcescu, Brăila.
30. *Paiul A. Gheorghe,* Lic. M. Voevod Mihai, Cetatea Albă.
31. *Teodorescu C Sav. Laur.,* Lic. Carol I, Craiova.
32. *Giurgiu I. Gheorghe,* Lic. Piarist, Timişoara.
33. *Groza P. Liviu,* Lic. Decebal, Deva.
34. *Raicu C. Ioan,* Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
35. *Bireescu N. Radu,* Lic. Sf. Savu, Bucureşti.
36. *Căileanu C. Liv. Dragomir,* Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
37. *Chirică V. Emil,* Lic. Naţional, Iaşi.
38. *Fântânar A. Tiberiu,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
39. *Parhon V. Stelian,* Lic. Alex. Lahovary, R. Vâlcea.
40. *Giurconi G. Mihai,* Lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
41. *Manole I. Ovidiu,* Lic. Traian Doda, Caransebeş.
42. *Pascu P. Nicolae,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
43. *Păuşeşti N. Mircea,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
44. *Tomuţa G. Octavian,* Lic. Radu Negru, Făgăraş.
45. *Paul A. Eugeniu,* Lic. Decebal, Deva.
46. *Scumpia D. Marius,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
47. *Miclea T. Nicolae,* Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
48. *Bociordt F. Ignaţie,* Lic. Moise Nicoară, Arad
49. *Costache G. Stelian,* Lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
50. *Croitorescu P. Radu,* Col. Naţional Carol I, Craiova.
51. *Mates St. Nicu,* Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
52. *Olaru V. Octavian,* Lic. Alecu Russo, Chişinău.
53. *Vuia C. Tiberiu,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
54. *Cârnaţ I. Ioan,* Lic. Sf. Vasile. Blaj.
55. *Dolinescu C. Marcel,* Lic. C. Negruzzi, Iaşi.
56. *Gauriuc C. Constantin,* Lic. Mitrop. Silvestru, Cernăuţi.
57. *Helmu P. Laurean* Lic. Sf. Vasile, Blaj.
58. *Marcu N. Marius,* Lic Titu Maiorescu, Aiud.
59. *Meteş P. Mircea,* Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
60. *Moldt Fr. Gheorghe,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
61. *Cormoş I. Dumitru,* Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia
62. *Dănilă P. Nicolae,* Lic. B. P. Haşdeu, Chişinău.
63. *Hirean A Alexandru,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
64. *Nistor I. Sabin,* Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
65. *Pricop Vasile,* Lic. Ferdinand I, Bacău.
66. *Zarcula Eugen,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
67. *Manea M. Aurel,* Lic. de Băieţi, Petroşani.
68. *Marinescu C. Ilie,* Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
69. *Olariu I. Virgil,* Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu.
70. *Orăşanu Gh. Panait,* Lic. N. Bălcescu, Brăila.
71. *Petruescu Z. Viorel Andrei,* Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
72. *Antohe I. Laurenţiu,* Lic M. Kogălniceanu, Vaslui.
73. *Costin A. Alexandrina,* Lic Reg. Elisabeta, Chişinău.
74. *Grecu P. Simion Dragoş,* Lic. C. Negruzzi, Iaşi.
75. *Lupău P. Ioan,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
76. *Merşavina T. Toma,* Lic. Traian Doda, Caransebeş.
77. *Preda V. Stelian,* Lic. Cor. Brediceanu, Lugoj.
78. *Sarchizov T. Serghie,* Lic. Sf. Dumitru, Ismail.
79. *Uzunov St. Victor,* Lic. M. Voevod Mihai, Cetatea Albă.
80. *Burlacu M. Petre,* Lic. Stefan cel Mare, Suceava.
81. *Cuc M. Alexandru,* Lic. Samuil Vulcan, Beiuş,
82. *Iercan T. Teodor,* Lic. Avram Iancu, Brad.
83. *Ivănescu Alexandru,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
84. *Marcov St. Rafael,* Lic. Piarist, Timişoara.
85. *Paicu Al Dumitru,* Lic. Alecu Russo, Chişinău.
86. *Todor I. Liviu,* Lic. Moise Nicoară, Arad.
87. *Bugariu C. Ioan,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
88. *Catană D. Florin,* Lic. Reg. Carol I, Craiova.
89. *Râşniţă A. Augustin,* Lic. Sf. Vasile, Blaj.
90. *Pauliuc-Burlă O. Gheorghe,* Lic. Reg. Ferdinand, Storojineţ.
91. *Bugnariu D. Tiberiu,* Lic. de Băieţi, Petroşani.
92. *Fiat P. Nicolae,* Lic. Traian Doda, Caransebeş.
93. *Noană F. Constantin,* Lic. Cor. Brediceanu, Lugoj.
94. *Panaitescu P. Alexandru,* Lic. M. Kogălniceanu, Iaşi.
95. *Blăjuţ I. Eugen,* Lic. Ferdinand I, Bacău.
96. *Cojocaru I. Radu,* Lic. Mitropolit Silvestru, Cernăuţi.
97. *Doboşan P. Valeriu,* Lic. Piarist, Timişoara.
98. *Dobre V. Trandafir,* Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
99. *Marinescu I. Mihai Valer,* Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu.
100. *Popovici I. Eugen,* Lic. Princip Nicolae, Sighişoara.
101. *Prisăcaru I. Mircea,* Lic. de Aplicaţie, Iaşi
102. *Sărdeleanu D. Gheorghe,* Lic. Naţional, Iaşi.
103. *Seiler R. Robert,* Lic. Piarist, Timişoara.
104. *Zverenciuc D. Vasile,* Lic. M. Voevod Mihai, Cetatea Albă.
105. *Zoiţan I. Ioan,* Lic. Dragoş Vodă, Câmpulung.
106. *Zubac M. Vladimir,* Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
107. *Clopotaru N. Radu,* Lic. Carol I, Craiova.
108. *Mihul C. Boris,* Lic Ion Creangă, Bălţi.
109. *Miron I. Ioan,* Lic. Alex. Lahovary, R. Vâlcea.
110. *Obadă V. Constantiu,* Lic. Mitrop. Silvestru, Cernăuţi.
111. *Almăjean D. I. Sergiu,* Lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
112. *Balica D Dumitru,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
113. *Bagiu N. Ioniţă,* Lic. C. D. Loga, Timişoara.
114. *Băltoianu I. Maximilian,* Lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
115. *Marcoi M. Florian,* Lic. Unirea, Focşani.
116. *Stoian Gh. Anatolie,* Lic. Sf. Dumitru, Ismail.
117. *Goian A Aurel,* Lic. Piarist, Timişoara.

118. *Oprea M. Ioan*, Lic. C. D. Loga, Timişoara.
119. *Pârpâriţă Maria*, Lic. Notre Dame de Sion, Iaşi.
120. *Tofan Ioan*, Lic. Stefan cel Mare, Soroca.
121. *Constantineseu T. Al.*, Lic. Carol I, Craiova.
122. *Donca A. Aloisiu*, Lic. Ferdinand I, Bacău.
123. *Marinescu I. Ilariu*, Lic. C. D. Loga, Timişoara.
124. *Novac T. Sergiu*, Lic. Traian Doda, Caransebeş.
125. *Vaida N. Alexandru*, Lic. A. Mureşanu, Dej.
126. *Beşleagă Traian*, Lic. Codreanu, Bârlad.
127. *Ciortea I. Vasile*, Lic. T. Maiorescu, Aiud.
128. *Teodorescu Elena*, Lic. Regina Maria, Bucureşti.
129. *Bălănescu Alexandru*, Lic. Sf. Iosif, Bucureşti.
130. *Felezeu Octavian*, Lic. Regele Ferdinand, Turda.
131. *Marcu Dumitru*, Lic. Alecu Russo, Chişinău.
132. *Mătasă P. Gheorghe*, Lic. Cuza Vodă, Huşi.
133. *Naum Mihail*, Lic. Traian, Severin.
134. *Pătraş Silviu*, Lic. Eud. Hurmuzachi, Rădăuţi.
135 *Pleşoianu V. Alex.*, Lic. C. D. Loga, Timişoara

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Anton Ioan (2072, 2096, 2099, 2112, 2166, 2169, 2176, 2182, 2185, 2190, 2197, 2202, 2209, 2217, 2221, 2227, 2220, 2225, 2226, 2228, 2231, 2234, 2236, 2237, 2240, 2283); **Bârzănescu Alexandru** (A. P.); **Birănaş Ioan** (P.; 2210, 2227, 2234, 2237, 2241, 2242, 2245, 2247); **Bogza Mihai** (1414, 2216, 2236, 2237). **Braşoveanu Gheorghe** (P.; 2154, 2202, 2209, 2211, 2213, 2233, 2234); **Constantinescu Ilie** (P.; 2033, 2050, 2060, 2171, 2178, 2182, 2196, 2209, 2210, 2211, 2214, 2216, 2217, 2231, 2233, 2234); **Costea Florian** (P.; 2120, 2192, 2233, 2234, 2237); **Dăscălescu Hristache** (2209, 2213, 2227, 2233, 2234, 2236); **Dobrescu M. Gh.** (2247); **Enache Ion** (P.; 2050, 2110, 2132, 2172, 2187, 2207, 2213, 2234, 2236); **Frunză Radu** (2174, 2226); **Godea Ioan** (P.; 1888, 1890, 1907, 2124, 2217, 2233, 2234, 2237); **Mahrenholz Johannes** (2217, 2218, 2219, 2220); **Miclea Nicolae** (2120, 2191, 2211, 2226, 2234); **Munteanu Lucian** (P.; 2194, 2196, 2208, 2237); **Plăngu Ion** (2115, 2233, 2234); **Popescu Barbu** (P.; 2018, 2086, 2114, 2195, 2198, 2202 2226, 2233, 2234); **Simeso Carol** (P.; 2118, 2129, 2150, 2151, 2158, 2171, 2196, 2213, 2221, 2245); **Stamate Ionel** (P.); **Stanciu A. Petre** (2086, 2087, 2095, 2110, 2116, 2191, 2192, 2193, 2203, 2207, 2211, 2217, 2228, 2231, 2233, 2234, 2236, 2237, 2240, 2241, 2243, 2244); **Tincu C-tin** (N; P.; 1938, 1962, 1969, 2185 ,2211, 2217, 2222, 2227, 2231, 2233, 2234, 2236, 2237, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246); **Ţigănoiu Alexandru** (P.; 1609, 1631, 1639, 1647, 1664, 1677, 1683, 1688, 1700, 1702, 1704, 1707, 1729, 1730, 1734, 1737, 1745, 1746, 1752, 1753, 1760, 1761, 1765, 1774, 1776, 1777, 1778, 1786, 1793, 1794, 1807, 1856, 1888, 1891, 1899, 1902, 1987, 2029, 2105, 2168, 2174, 2213, 2217, 2219, 2220, 2221). **Vasiliu N. I.** (P.; 2224); **Wegener Eugen** (P.; 1803, 2128, 2190, 2205, 2208, 2209, 2210, 2213, 2226, 2227, 2231, 2233, 2234, 2236, 2237, 2240).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXIV. SEPTEMVRIE 1944 No. 7.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **COMANDOR I. LINTES:** DOUA TEOREME DE TEORIA NUMERELOR.
2. **M. GHERMANESCU:** ASUPRA PROBLEMEI 1489.
3. NOTE MATEMATICE 19, 20, 21.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 982. 1946, 1969, 2011, 2072, 2091, 2116, 2130. 2226.
6. PROBLEME PROPUSE: 2257–2264.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — NO. 7. TIMISOARA, SEPTEMVRIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

DOUĂ TEOREME DE TEORIA NUMERELOR

DE

Comandor I. LINTEȘ.

I. *Știind că* N *este un număr impar, iar*

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{2^\alpha.n}$$

reprezintă numerile prime cu $2^{\alpha+1}.N$ *și mai mici ca el, atunci avem*

$$p_{2^{\alpha-1}.n+1} + p_{2^\alpha.n} = p_{2^{\alpha-1}.n+2} + p_{2^\alpha.n-1} = \cdots$$

$$\cdots = p_{3.2^{\alpha-2}.n} + p_{3.2^{\alpha-2}.n+1} = 3.2^\alpha.N.$$

În adevăr, este lesne de observat că dacă

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_{2n}$$

reprezintă numerele prime cu $2N$ și mai mici ca el, atunci numerele

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{2^i.n}$$

reprezintă numerile prime cu $2^{i+1}.N$ și mai mici ca el, știind că $i \geqq 1$.

În acest caz avem relațiunile:

$$(1) \qquad p_1 + p_{2^i.n} = p_2 + p_{2^i.n-1} = \cdots$$

$$\cdots = p_{2^{i-1}.n} + p_{2^{i-1}.n+1} = 2^{i+1}.N,$$

unde $i = 1, 2, 3, \ldots, \alpha$.

Făcând în (1) $i = \alpha$ și adunând prima relație cu ultima, a doua cu penultima și tot așa mai departe, obținem

$$(2) \qquad (p_1 + p_{2^{\alpha-1}.n}) + (p_{2^{\alpha-1}.n+1} + p_{2^\alpha.n}) =$$

$$(p_2 + p_{2^{\alpha-1}.n-2}) + (p_{2^{\alpha-1}.n-1} + p_{2^\alpha.n-2}) = \cdots$$

$$\cdots = 2^{\alpha+2}.N.$$

Deasemenea, făcând în (1) $i = \alpha - 1$ și scăzând apoi relațiile obținute din (2), obținem tocmai relațiile din enunț.

II. *În aceleași condițiuni ca mai sus, avem*

$$(p_{2^{\alpha-1}.n+1} \cdot p_{2^{\alpha-1}.n+2} \cdots p_{2^\alpha.n})^2 - 1 = M(2^\alpha.N).$$

În adevăr, relațiile (1), pentru $i = \alpha$, se mai pot scrie

$$p_{2^\alpha.n} = 2^{\alpha+1}.N - p_1$$

$$p_{2^\alpha.n-1} = 2^{\alpha+1}.N - p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{2^{\alpha-1}.n+1} = 2^{\alpha+1}.N - P_{2^{\alpha-1}.n}.$$

Înmulțind acest relații între ele și ridicând apoi la patrat, obținem

$$(p_{2^{\alpha-1}.n+1}\ p_{2^{\alpha-1}.n+2} \cdots p_{2^\alpha.n})^2 = M(2^{\alpha+1}.N) +$$

$$(p_1\ p_2 \cdots p_{2^{\alpha-1}.n})^2.$$

Dar știm că

$$(p_1 \cdot p_2 \cdots p_{2^{\alpha-1}.n})^2 - 1 = M(2^\alpha.N).$$

Deci relația din enunț este demonstrată.

ASUPRA PROBLEMEI 1489

DE

M. GHERMĂNESCU.

În această problemă, se cerea *un număr de patru cifre al cărui cât prin numărul format de ultimele sale două cifre să fie patrat perfect.*

Voi da aci o rezolvare diferită de cea dată la pag. 110—112, V. XXII, care necesită mai puține cercetări, cu atât mai mult cu cât nu s'au dat acolo toate soluțiile.

Fie a numărul format cu primele două cifre, iar b numărul format cu ultimele două cifre ale numărului căutat N; s'a scris la locul arătat

$N = 100a + b = p^2 b$, sau (1) $100a = (p^2 - 1)b$.

Fie d c. m. m. d. c. al numerelor a şi b, $a=d\lambda$, $b=d\mu$, unde λ şi μ sunt astfel prime între ele; (1) se reduce la

$$100\lambda=(p^2-1)\mu \tag{2}$$

şi cum μ e prim cu λ, el este neapărat un divizor al lui 100, $\mu=2^\alpha.5^\beta$, unde $\alpha,\beta=0,1,2$, combinaţia $\alpha=\beta=2$ fiind exclusă căci dă $\mu=100$. Să examinăm cazurile posibile.

I. $\beta=0$. Avem $\mu=2^\alpha$, iar (2) devine

$$2^{2-\alpha}.5^2\lambda=p^2-1. \tag{2'}$$

Dacă $\alpha=0$, punând $p=2k+1$, (2') devine

$$5^2\lambda=k(k+1),$$

deci $k=25m$, sau $k=25m-1$. În primul caz, $k=25m$, avem $\mu=50m+1$, $\lambda=m(25m+1)$ şi cum λ are cel mult două cifre, trebue ca $m=1$, deci $\lambda=26$, $p=51$, $a=26d$, $b=d$, N=2601 d, unde $d=1,2,3$; găsim astfel soluţiile *2601*, *5202*, *7803*.

În cazul $k=25m-1$, avem $p=50m-1$, $\lambda=m(25m-1)$, $m=1$ sau 2, deci $p=49$, $\lambda=24$, $a=24d$, $b=d$, N = 2401 d, cu $d=1,2,3,4$, care dau soluţiile *2401*, *4802*, *7203*, *9604*, sau $p=99$, $\lambda=98$, $a=98d$, $b=d$, N = 9801 d, cu $d=1$, care dă soluţia *9801*.

Dacă $\alpha=1$, punând $p=2k+1$, (2') devine

$$5^2\lambda=2k(k+1),$$

deci $k=25m$, sau $k=25m-1$. În cazul $k=25m$, avem $p=50m+1$, $\lambda=2m(25m+1)$, cu $m=1$, deci $p=51$, $\lambda=52$, $a=52d$, $b=2d$, N=5202 d, cu $d=1$, care dă soluţia 5202, deja găsită.

În cazul $k=2m-1$, avem $p=50m-1$, $\lambda=2m(25m-1)$, cu $m=1$, deci $p=49$, $\lambda=48$, $a=48d$, $b=2d$, N = 4802 d, cu $d=1$ sau 2, care duc la soluţiile 4802, 9604, deja găsite.

Dacă $\alpha=2$, (2') devine

$$5^2\lambda=p^2-1,$$

care cere $p=25m\pm1$. În cazul $p=25m+1$, avem $\lambda=m(25m+2)$, cu $m=1$, deci $p=26$, $\lambda=27$, $a=27d$, $b=4d$, N=2704 d, cu $d=1,2,3$, care dau soluţiile *2704*, *5408*, *8112*.

În cazul $p=25m-1$, avem $\lambda=m(25m-2)$, cu $m=1$ sau 2, deci $p=24$, $\lambda=23$, $a=23d$, $b=4d$, N = 2304 d cu $d=1,2,3,4$, care dau soluţiile *2304*, *4608*, *6912*, *9216*, sau $p=49$, $\lambda=96$, $a=96d$, $b=4d$, N = 9604 d, cu $d=1$, care dă soluţia 9604, deja găsită.

II. $\beta=1$. Avem $\mu=2^\alpha.5$, iar (2) devine

$$2^{2-\alpha}.5\lambda=p^2-1. \tag{2''}$$

Dacă $\alpha=0$, punând $p=2k+1$, (2'') devine

$$5\lambda=k(k+1),$$

deci $k=5m$, sau $k=5m-1$. În cazul când $k=5m$, avem $p=10m+1$, $\lambda=m(5m+1)$, cu $m=1,2,3,4$, care dau $p=11$, $\lambda=6$, $a=6d$, $b=5d$, N = 605 d, cu $d=1,2,\ldots,15$ şi soluţiile *1210*, *1815*, *2420*, *3025*, *3630*, *4235*, *4840*, *5445*, *6050*, *6655*, *7260*, *7865*, *8470*, *9075*, *9680*, sau $p=21$, $\lambda=22$, $a=22d$, $b=5d$, N=2205 d, cu $d=1,2,3,4$, deci soluţiile *2205*, *4410*, *6615*, *8820*, sau $p=31$, $\lambda=48$, $a=48d$, $b=5d$, N = 4805 d, cu $d=1,2$, deci soluţiile *4805*, *9610*, sau $p=41$, $\lambda=84$, $a=84d$, $b=5d$, N=8405 d, cu $d=1$, deci soluţia 8405.

În cazul când $k=5m-1$, avem $p=10m-1$, $\lambda=m(5m-1)$, cu $m=1,2,3,4$, care dau $p=9$, $\lambda=4$, $a=4d$, $b=5d$, N=405 d, cu $d=3,4,\ldots,19$. deci soluţiile *1215*, *1620*, *2025*, *2430*, *2835*, *3240*, *3645*, *4050*, *4455*, *4860*, *5265*, *5670*, *6075*, *6480*, *6885*, *7290*, sau $p=19$, $\lambda=18$, $a=18d$, $b=5d$, N = 1805 d, cu $d=1,2,3,4,5$, deci soluţiile *1805*, *3610*, *5415*, *7220*, *9025*, sau $p=29$, $\lambda=42$, $a=42d$, $b=5d$, N = 4205 d, cu $d=1,2$, deci soluţiile 4205, 8410, sau $p=39$, $\lambda=76$, $a=76d$, $b=5d$, N = 7605 d, cu $d=1$, deci soluţia *7605*.

III. $\beta=2$. Avem $\mu=2^\alpha.5$, iar (2) devine

$$2^{2-\alpha}\lambda=p^2-1. \tag{2'''}$$

Dacă $\alpha=0$, punând $p=2k+1$, (2''') devine

$$\lambda=k(k+1),$$

deci $k=1,2,\ldots,9$ cărora corespund $p=3$, $\lambda=2$, $a=2d$, $b=25d$, N=225 d, care cere $d=1,2,3$, pentru ca b să aibă două cifre, dar cere $d>4$ pentruca N să aibă patru cifre, deci nu avem soluţie; $p=5$, $\lambda=6$, $a=6d$, $b=25d$, N=625 d, cu $d=2,3$, deci soluţiile *1250*, *1875*; $p=7$,

$\lambda=12$, $a=12\,d$, $b=25\,d$, $N=1225d$, cu $d=1, 2, 3$, deci soluțiile *1225, 2450, 3675.*

Dacă $\alpha=1$, punând $p=2k+1$, (2″) devine

$$5\lambda=2k(k+1),$$

deci $k=5m$, sau $k=5m-1$. Când $k=5m$, avem $\lambda=2m(5m+1)$, $p=10m+1$ și obținem soluții deja găsite. La fel, când $k=5m-1$.

Dacă $\alpha=2$, (2″) devine $5\lambda=p^2-1$, deci $p=5k\pm1$. Când $p=5k+1$, avem $\lambda=k(5k+2)$, deci $k=1, 2, 3, 4$, cărora corespund $p=6$, $\lambda=7$, $\mu=20$, $a=7\,d$, $b=20\,d$, $N=720\,d$, cu $d=2, 3, 4$, deci soluțiile *1440, 2160, 2880;* $p=16$, $\lambda=51$, $a=51\,d$, $b=20\,d$, $N=5120\,d$, deci soluția *5120.* Când $p=5k-1$, avem $\lambda=k(5k-2)$, deci $k=1, 2, 3, 4$, cărora corespund $p=4$, $\lambda=3$, $a=3\,d$, $b=20\,d$, $N=320\,d$, cu $d=4$, deci soluția *1280;* $p=14$, $\lambda=39$, $a=39\,d$, $b=20\,d$, $N=3920\,d$, cu $d=1, 2$, deci soluțiile *3920, 7840.*

$p=9$, $\lambda=20$, $a=20\,d$, $b=25\,d$, $N=2025\,d$, care dă soluții deja găsite;

$p=11$, $\lambda=30$, $a=30\,d$, $b=25\,d$, $N=3025\,d$, care dă soluții deja găsite;

$p=13$, $\lambda=42$, $a=42\,d$, $b=25\,d$, $N=4225\,d$, care dă soluțiile *4225, 8450.*

$p=15$, $\lambda=56$, $a=56\,d$, $b=25\,d$, $N=5625\,d$, care dă soluția *5625;*

$p=17$, $\lambda=72$, $a=72\,d$, $b=25\,d$, $N=7225\,d$, care dă soluția *7225.*

$p=19$, dă soluții deja găsite.

Dacă $\alpha=1$, deci $\mu=50$, punând $p=2k+1$, (2‴) devine

$$\lambda=2k(k+1),$$

deci $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$, cărora corespund soluții deja găsite.

În rezumat, problema admite 78 soluții, în loc de 64, câte s'au găsit la locul citat. Diferența provine din faptul că egalitatea $5a=4b$, la care se ajunge în cazul $p=9$, este satisfăcută de 17 perechi de numere de două cifre a și b, iar nu de 3, cum este arătat acolo.

NOTE MATEMATICE

19. — *Triangles méteparallèles et orthopôle.*

1. Soient A′, B′, C′ les symétriques des sommets A, B, C d'un triangle, par rapport à une droite Δ située dans son plan. Les triangles ABC, A′B′C′ sont métaparallèles car les parallèles A′M, B′M à BC, CA étant respectivement symétriques de B′C′, C′A′, par rapport à des axes respectivement parallèle et perpendiculaire à Δ, le quadrangle AB′C′M est inscriptible dans un cercle (O′) et le côté C′M coïncide avec la parallèle à AB menée par C′. De même, les parallèles à B′C′, C′A′, A′B′, A′B′ menées par A, B, C, concourent en M′ sur le cercle (O) circonscrit au triangle ABC. *Les points* M, M′ *sont les métapôles des triangles* ABC, A′B′C′ *symétriques, par rapport à une droite* Δ. La droite MM′ rencontre les cercles (O), (O′) aux points dont les droites de *Simson*, par rapport à ABC et A′B′C′, sont parallèles à Δ.

2. Lorsque Δ est un diamètre du cercle (O), les métapôles M, M′ sont sur ce cercle, symétriquement, par rapport à Δ, où ils coïncident avec les orthopôles des diamètres Δ_1, Δ_1', parallèles à Δ, des cercles circonscrits aux triangles anticomplémentaires $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ de ABC, A′B′C′. En effet, la perpendiculaire à Δ issue de A rencontre (O) en A′ et la parallèle menée par ce point à BC coupe (O) en M. A_h étant le pied de la hauteur A_1A_h de $A_1B_1C_1$, le trapèze $AA'MA_h$ est symétrique par rapport à la médiatrice de AA_h. La droite A′M, symétrique de la perpendiculaire à Δ menée par A_h, par rapport à A_hA_1, passe donc par l'orthopôle de Δ_1 pour le triangle $A_1B_1C_1$ [1].

N. B. Dans le cas général où Δ est une droite quelconque, les points M, M′ sont les transformés des orthopôles des diamètres Δ_1, Δ_1', parallèles à Δ, des triangles anticomplémentaires de ABC, A′B′C′ par des translations dont la direction est normale à Δ, l'amplitude étant la distance de Δ à Δ_1 et à Δ_1'.

V. THÉBAULT
TENNIE (SARTHE-FRANCE)

---

[1]) *V. Thébault, Nouvelles Annales*, 1910—271.

20. — *Ein diophantisches Problem.*

Die Gleichung

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=2u^3$$

hat die Lösung

$$\begin{cases} x=b^3+c^3+a(b^2+c^2)+2bc(b+c)+3a^2(b+c)+4abc \\ y=a^3+c^3+b(a^2+c^2)+2ac(a+c)+3b^2(a+c)+4abc \\ z=a^3+b^3+c(a^2+b^2)+2ab(a+b)+3c^2(a+b)+4abc \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} x=3\{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)\} \\ y=a^3+c^3+c^3+3(a^2b+ac^2+b^2c)+6abc \\ z=a^3+b^3+c^3+3(ab^2+a^2c+bc^2)+6abc. \end{cases}$$

$$u=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

$a=3,\ b=2,\ c=1$

$$141^3+144^3+147^3-3\cdot141\cdot144\cdot147=2\cdot6^3$$

$a=4,\ b=2,\ c=1$

$$217^3+231^3+238^3-3\cdot217\cdot231\cdot238=$$

$$222^3+223^3+241^3-3\cdot222\cdot223\cdot241=2\cdot49^3.$$

JOHANNES MAHRENHOLZ
(COTTBUS)

---

21. — *Notă la articolul „Progresii mixte".*

I. *Introducerea mezilor geometrico-aritmetici.*

Ca să putem introduce între două numere date, alte numere (numite mezi geometrico-aritmetici) astfel ca împreună cu numerele date să formeze o progresie geometrico-aritmetică, trebue să se dea şi o relaţie între raţia geometrică q şi cea aritmetică r.

Dacă relaţia între cele două raţii este de gradul I, atunci se înlocuieşte una în funcţie de cealaltă, în formula acesteia din urmă şi se capătă o ecuaţie în r sau q. Rezolvând această ecuaţie, vom opri pentru r sau q numai rădăcinile reale raţionale.

Formula care dă pe r în cazul întroducerii mezilor geometrico-aritmetici. Să întroducem între a şi b, m mezi geometrico-aritmetici, relaţia dintre raţii fiind $q=\alpha r+\beta$, α şi β fiind orice numere întregi, fracţionare, pozitive sau negative (β putând fi şi nul).

În cazul când $\beta=0$, formula este

$$(1)\qquad \boxed{r=\frac{(ar-1)[l-a(ar)^{m+1}]}{(ar)^{m+1}-1}}.$$

Formula în general, când $q=\alpha r+\beta$ este

$$(2)\qquad \boxed{r=\frac{(\alpha r+\beta-1)[l-a(\alpha r+\beta)^{m+1}]}{(\alpha r+\beta)^{m+1}-1}}.$$

Şi la formula (7) şi la formula (8) se scapă de numitori şi se rezolvă ecuaţiile căpătate.

Dacă relaţia între raţii e de un grad mai mare decât 1, atunci căutăm să eliminăm pe r sau q între formula care-l dă pe r sau q şi relaţia dată.

II. *Introducerea mezilor aritmetico-geometrici.*

Avem de spus aceleaşi lucruri ca şi în cazul întroducerii mezilor geometrico-aritmetici.

Fie a, b numerele date, m numărul mezilor aritmetico-geometrici ce trebuesc întroduşi între a şi b şi relaţia dintre raţii $q=\alpha r+\beta$.

Formula care dă pe r.

În cazul $\beta=0$, avem

$$(3)\qquad \boxed{r=\frac{(\alpha r-1)[l-a(\alpha r)^{m+1}]}{\alpha r[(\alpha r)^{m+1}-1]}}.$$

În cazul general când $q=\alpha r+\beta$, avem

$$(4)\qquad \boxed{r=\frac{(\alpha r+\beta-1)[l-a(\alpha r+\beta-1)^{m+1}]}{(\alpha r+\beta)[(\alpha r+\beta)^{m-1}-1]}}.$$

Dacă relaţia între raţii e de un grad mai mare ca 1 se elimină r, sau q între formula care-l dă pe r, sau q şi relaţia dată.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, No. 11, 1944. Rezultatele exerciţiilor numerice abstracte, de *I. Ionescu*. Multiperfecte şi amiabile inedite, de *P. Poulet*. O problemă de geometria triunghiului, de G-l *Gh. I. Popescu*. Generalizări ale elipsei lui *Steiner* şi cubicei lui *Darboux*, de *N. N. Mihăileanu*. Note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, No. 12, 1944. Indicatorul de ordin superior al unei sume şi al unui produs,

de Comandor *I. Linteş*. O pagină a profesorului *George Ţiţeica*, de *C. Ionescu-Bujor*. O aplicaţie a teoremei lui *Cesàro*, de *N. Gaiu*. Despre hipocicloida lui *Steiner*, de *P. P. Drăghiceanu*, Raport pentru decernarea premiului „*Spiru Haret*", de ing. *I. Chiţulescu*, *Al. Stoenescu* şi *Gabriela Ţiţeica*. Note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate şi propuse.

3. Dr. Ing. *Aurel Bărglăzan*. Beitrag zur Berechnung von Axialpumpen mit positiver Saughöhe (Sonderdruck aus dem „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara", Band 11, Heft 3—4)

4 *Teofil T. Vescan*. Memoriu de titluri şi lucrări.

5. *I. V. Mătieş*. Patrate isofinale. (Extras din „Gazeta Matematică", Nr. 7, Anul XLIX, 1944).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 982. — *Să se simplifice fracţia*

$$\frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}.$$

V. ALACI

Soluţie. Pentru $a=b$, $b=c$, $c=a$, observăm că şi numărătorul şi numitorul se anulează, deci ei se divid prin produsul $(a-b)(b-c)(c-a)$. Cum acest produs este omogen şi de gradul al 3-lea, iar numărătorul şi numitorul fracţiei date sunt şi ei omogeni şi de gradul al 5-lea şi al 3-lea respectiv, rezultă că fracţia dată, după simplificarea prin $(a-b)(b-c)(c-a)$, este omogenă şi de formă

$$\frac{k_1(a^2+b^2+c^2)+k_2(ab+bc+ca)}{k_3},$$

unde k_1, k_2, k_3 sunt numere ce le vom determina.

Avem prin urmare

$$(1)\qquad \frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)} = \frac{k_1(a^2+b^2+c^2)+k_2(ab+bc+ca)}{k_3}.$$

Pentru a determine k_1, k_2, k_3, vom particulariza pe a, b, c.

În adevăr, pentru $a=0$, $b=1$, $c=-1$, apoi, pentru $a=1$, $b=0$, $c=2$, relaţia (1) devine respectiv

$$\frac{-1-1}{-1-1}=\frac{2k_1-k_2}{k_3}, \qquad \frac{-8+4}{-2+4}=\frac{5k_1+2k_2}{k_3}.$$

Avem astfel sistemul

$$\begin{cases} 2k_1-k_2=k_3 \\ 5k_1+2k_2=-2k_3, \end{cases}$$

De aci deducem,

$$k_1=0, \qquad k_2=-k_3$$

şi astfel relatia (1) devine

$$\frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}=-(ab+bc+ca).$$

Soluţie analoagă dată de d-l *Stan Ioan* (Lic. Roman).

Altă soluţie. Însemnând cu M şi N, respectiv, numărătorul şi numitorul şi căutând să-i descompunem în factori, putem scri succesiv,

$$\begin{aligned} M &= a^2(b^3-c^3)-a^3b^2+b^2c^3+a^3c^2-b^3c^2 = \\ &a^2(b-c)(b^2+bc+c^2)-a^3(b^2-c^2)-b^2c^2(b-c)= \\ &(b-c)[a^2(b^2+bc+c^2)-a^3(b+c)-b^2c^3]= \\ &(b-c)[b^2(a^2-c^2)+a^2bc+a^2c^2-a^3b-a^3c]= \\ &(b-c)[b^2(a^2-c^2)+a^2b(c-a)+a^2c(c-a)]= \\ &(b-c)(c-a)[-b^2(c+a)+a^2b+a^2c]= \\ &(b-c)(c-a)(-ab^2-b^2c+a^2b+a^2c)= \\ &(b-c)(c-a[ab(a-b)+c(a^2-b^2)]= \\ &(b-c)(c-a)a-b)ab+bc+ca; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= a^2(b-c)-ab^2+b^2c+ac^2-bc^2= \\ &a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)=(b-c)+(a^2+bc-ab-ac) \\ &=(b-c)[b(c-a)-a(c-a)]= \\ &(b-c)(c-a)(b-a)=-(b-c)(c-a)(a-b). \end{aligned}$$

Fracţia dată se poate astfel scri:

$$\frac{M}{N}=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)}{-(b-c)(c-a)(a-b)}=-(ab+bc+ca),$$

acelaşi rezultat ca mai sus.

Soluţii analoage date de d-nii: *Nicolescu Stelian* (Lic. R.-Vâlcea), *Predoescu Marin* (Lic. Buzeşti, Craiova) şi *Tilică C. Ştefan* (Lic. T.-Severin).

Soluţia autorului. Vom da încă o soluţie din care să reiasă şi metoda prin care s-a ajuns la problema tratată şi prin care se pot formula şi altele analoage.

În adevăr, fie ecuaţia

$$(1)\qquad x^3+px^2+qx+r=0,$$

cu rădăcinile a, b, c. Conform relaţiilor între rădăcini şi coeficienţi, avem

$$(2)\qquad q=ab+bc+ca,$$

Pe de altă parte a, b, c fiind rădăcini ale ecuației (1), satisfac identic relațiile

$$\begin{cases} a^3+pa^2+qa+r=0 \\ b^3+pb^2+qb+r=0 \\ c^3+pc^2+qc+r=0. \end{cases}$$

Avem un sistem liniar în p, q, r și rezolvindu-l după regula lui *Cramer*, găsim pentru q,

$$q=-\frac{\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}}.$$

Dezvoltând determinanții după elementele primei coloane, avem

$$(3)\qquad q=-\frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)+(a-b)}.$$

Egalând valorile lui q din (2) și (3), obținem

$$\frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}=-(ab+bc+ca).$$

Astfel fracția dată este simplificată.

Problema 1946. — *Să se găsească două numere de câte cinci cifre, unul patrat perfect, și altul cub perfect, știind că diferă între ele numai prin cifra de la mijloc. De exemplu* $118^2=13924$ *și* $24^3=13824$.

G-L GH. BUICLIU

Soluție. Fie P^2 și N^3 numerele căutate. Avem

$$100^2\leq P^2\leq 316^2 \quad \text{și} \quad 22^3\leq N^3\leq 46.$$

Din numerele N de la 22 la 46 eliminăm pe acelea ale căror cuburi nu se termină la unități în 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Rămân pentru N numerele

24, 25, 26, 29, 30, 34, 35, 36, 39, 40, 41, 44, 46

pe care le ridicăm la cub și apoi eliminăm pe acelea ale căror ultime 2 cifre nu este terminație de pătrat. Rămân astfel pentru N^3 numerele

$24^3=13824$; $25^3=15625$; $26^2=17576$;

$29^3=24389$; $30^3=27000$; $34^3=39304$;

$36^3=46656$; $40^3=64000$; $41^3=68921$;

$44^3=85184$ și $46^3=97336$.

La fiecare din aceste numere înlocuim cifra de la mijloc succesiv prin $0, 1, 2, \ldots, 9$ și obținem o serie de 110 numere din care alegem pe acelea care sunt patrate perfecte, fie prin extrageri de rădăcini, fie prin criterii de divizibilitate. Găsim astfel următoarele 5 grupe de soluții

$118^2=13924$ cu $24^3=13824$;

$125^2=15625$ cu $25^3=15625$;

$198^2=39204$ cu $34^3=39304$;

$216^2=46656$ cu $36^3=46656$;

$261^2=68121$ cu $41^3=68921$.

D-nii *Boerescu P. G*, și *Wegener Eugen* au găsit toate cele 5 grupuri de soluții.

Soluții parțiale au dat d-nii: *Bossie V. Boris, Godea Ioan* și *Ionescu F. Petre.*

Problema 1969. *Să se arate că*

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}(x+y)=-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}(x+y)$$

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)=1-\sec x\sec y\sec(x+y),$$

în cazul

$$x+y+z=n\pi \qquad (n \text{ întreg}).$$

N. N. MIHAILEANU

Soluție. **1.** Primul membru al relației întâia se mai poate scri succesiv

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}-\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}-\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin(x+y)[\cos(x+y)-\cos x\cos y]}{\cos x\cos y\cos(x+y)}=$$

$$\operatorname{tg}(x+y)\frac{-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}(x+y).$$

Avem astfel stabilită prima relație cerută, iar condiția $x+y+z=n\pi$, nu este necesară.

2. Primul membru al relației 2-a se poate scri succesiv

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)=$$

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\cdot\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=$$

$$\frac{\sin x \sin y \cos(x+y) - \sin^2(x+y)}{\cos x \cos y \cos(x+y)} =$$

$$\frac{\sin x \sin y \cos(x+y) - 1 + \cos^2(x+y)}{\cos x \cos y \cos(x+y)} =$$

$$\frac{\cos(x+y)[\sin x \sin y + \cos(x+y)] - 1}{\cos x \cos y \cos(x+y)} =$$

$$\frac{\cos(x+y)\cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos(x+y)} - \frac{1}{\cos x \cos y \cos(x+y)} =$$

$$1 - \sec x \sec y \sec(x+y).$$

Relaţia 2-a cerută este astfel stabilită; se observă şi aci că condiţia $x+y+z=n\pi$, nu este necesară.

Soluţii bune date de d-nii: *Bosie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt.), *Gâţă Gh. Gheorghe* (Lic. Tg-Jiu), *Gligor N. Ioan* (Ş-lt.), *Godea Ioan* (Lic. Beiuş), *Goga Florian* (Polit., Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Manolache Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Sabău C.* (Polit., Timişoara), *Şipoş I. Eugen* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2011. — *Să se găsească un patrat perfect de şapte cifre din care, suprimând a doua, a treia şi a patra cifră, să rămână patratul numărului format din ultimele două cifre ale rădăcinii sale patrate.*

M GHERMANESCU

Soluţie. Fie $abcdefg$ patratul căutat, iar $mnpr$ rădăcina sa patrată; avem, după enunţ,

$$10^6 a+10^5 b+10^4 c+10^3 d+10^2 e+10f+g= 10^4 \overline{mn}^2 + 2.10^2 \overline{mn} \cdot \overline{pr} + \overline{pr}^2, \tag{1}$$

$$10^3 a+10^2 e+10f+g=\overline{pr}, \tag{2}$$

unde

$$10^3 \leq \overline{mnpr} \leq 3162, \quad 1 \leq m \leq 3, \tag{3}$$

căci patratul are şapte cifre.

Din (1) şi (2), deducem

$$5(10^3 a + 10^2 b + 10c + d - a) = (10m+n)[50(10m+n)+10p+r]. \tag{4}$$

Pentru ca membrul al doilea să se dividă prin 5, trebue să avem unul din cazurile $n=0$, $n=5$, $r=0$, $r=5$, pe care le vom examina succesiv.

1°. $n=0$. Relaţia (4) devine

$$10^3(m^2-a) = 10^2 b+10c+d-a-2m(10p+r). \tag{5}$$

Cum membrul al doilea este inferior în valoare absolută lui 1000, căci $m \leq 3$, rezultă că el este identic nul, adică avem $m^2=a$, deci, după (3), $m=1,2,3$, $a=1,4,9$, iar (5) se reduce la

$$10^2 b+10c+d-a=2m(10p+r. \tag{6}$$

Ţinând seama de (2), rezultă

$$\begin{aligned} &m=1, \quad a=1, \quad 32 \leq \overline{pr} \leq 44; \\ &m=2, \quad a=4, \quad 64 \leq \overline{pr} \leq 70; \\ &m=3, \quad a=9, \quad 95 \leq \overline{pr} \leq 99. \end{aligned} \tag{7}$$

În cazul $m=1$, $a=1$, (6) devine

$$10^2 b+10c+d-1=2(10p+r), \tag{6'}$$

care arată că $d=1,3,5,7,9$, cărora le corespund respectiv $r=0$, sau 1, sau 6, 2 sau 7, 3 sau 8, 4 sau 9, în care (6') devine

$$10b+c=2p \quad \text{sau} \quad 10b+c=2p+1.$$

Cum, după (7), $p=3$ sau 4, prima dă $b=0$, $c=6$ sau 8, a doua dă $b=0$, $c=7$ sau 9, cu soluţiile

$$1032^2, 1033^2, 1034^2, 1035^2, 1036^2, 1037^2, 1038^2,$$

$$1039^2, 1040^2, 1041^2, 1042^2, 1043^2, 1044^2,$$

în număr de 13.

Examinând la fel cazurile $m=2$, $m=3$, obţinem soluţiile

$$2064^2, 2065^2, 2066^2, 2067^2, 2068^2, 2069^2, 2070^2,$$

$$3095^2, 3096^2, 3097^2, 3098^2, 3099^2,$$

în număr de 12.

2°. $n=5$. Relaţia (4) devine

$$10^3(m^2+m-a) = 10^2 b+10c+d-a-250-(2m+1)(10p+r). \tag{8}$$

Cum membrul al doilea este inferior în valoare absolută lui 1000, această egalitate are loc numai când $m^2+m-a=0$, deci $m=1$, $a=2$, sau $m=2$, $a=6$, iar

$$10^2 b+10c+d-a=250+(2m+1)(10p+r). \tag{8'}$$

Ţinând seama de (2), rezultă

$$\begin{aligned} &m=1, \quad a=2, \quad 45 \leq \overline{pr} \leq 54, \\ &m=2, \quad a=6, \quad 78 \leq \overline{pr} \leq 83. \end{aligned}$$

În cazul $m=1$, $a=2$, (8′) devine

$$10^2b+10c+d-1=250+3(10p+r),$$

care conduce la soluţiile

$$1545^2,\ 1546^2,\ 1547^2,\ 1548^2,\ 1549^2,$$

$$1550^2,\ 1551^2,\ 1552^2,\ 1553^2,\ 1554^2,$$

în număr de 10.

În cazul $m=2$, $a=6$, găsim soluţiile

$$2578^2,\ 2579^2,\ 2580^2,\ 2581^2,\ 2582^2,\ 2583^2,$$

în număr de 6

3°. $r=0$. Relaţia (2) devine $10a+e=p^2$, $4\leqq p\leqq 9$, iar (1) dă apoi

$$1\ bcd\,600=\overline{mn\,40}^2,\quad 2\ bcd\,500=\overline{mn\,50}^2,$$

$$3\ bcd\,600=\overline{mn\,60}^2,\quad 4\ bcd\,900=\overline{mn\,70}^2,$$

$$6\ bcd\,400=\overline{mn\,80}^2,\quad 8\ bcd\,100=\overline{mn\,90}^2,$$

care dă, soluţii de forma

$$\overline{1n40}^2,\ \overline{1n50}^2,\ \overline{1n60}^2,\ \overline{2n70}^2,\ \overline{2u80}^2,\ \overline{2n90}^2,$$

unde $n=0,1,2,\ldots,9$; găsim soluţiile

$$1140^2,\ 1240^2,\ 1340^2,\ 1450^2,\ 1650^2,\ 1760^2,$$

$$1860^2,\ 1960^2,\ 2170^2,\ 2480^2,\ 2890^2,\ 2990^2,$$

în număr de 12, dintre care am omis pe cele deja găsite.

4°. $r=5$. Cum $a\,e\,f\,g=\overline{p\,5}^2$ are patru cifre, rezultă $p=3,4,\ldots,9$, deci $a=1,2,3,4,5,7,9$, cu care (1) arată că avem respectiv soluţii de forma

$$1000\leqq 1n35<1414,\quad 1415\leqq 1n45<1735,$$

$$1736<1n55<2000,\quad 2000<2n65<2236,$$

$$2236<2n75<2449,\quad 2649<2n85<2928,$$

$$3000<3n95<3162.$$

Găsim soluţiile

$$1135^2,\ 1235^2,\ 1335^2,\ 1445^2,\ 1645^2,\ 1755^2,\ 1855^2,$$

$$1955^2,\ 2165^2,\ 2275^2,\ 2375^2,\ 2685^2,\ 2785^2,$$

în număr de 13.

Totalizând, problema admite

$$13+12+10+6+12+13=66$$

soluţii.

Notă. 1°. D-l *Creţa Gavril* (Polit., Timişoara) a dat o foarte bună soluţie, din care au scăpat însă soluţiile 3096^2, 3097^2, 3098^2, 3099^2.

2° D-l *Chiriac Constantin* a dat o soluţie destul de bună însă, nefăcând verificările necesare, a găsit 155 soluţii!

M. G.

Problema 2072. — *Se dă un triunghiu* A B C *şi mediana* A M $=a$. Fie

$$\sphericalangle\,MAC=\alpha,\quad \sphericalangle\,MAB=\beta,\quad \sphericalangle\,AMC=\gamma.$$

Să se stabilească relaţiile

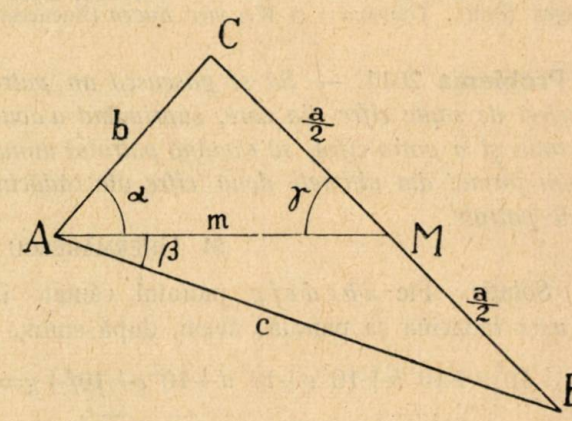
$$b^2\cos 2\alpha-c^2\cos 2\beta+2am\cos\gamma=0,$$

$$4bc\cos(\alpha-\beta)+a^2\cos 2\gamma=4m^2,$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

V. ALACI

Soluţie. Construim figura în condiţiile problemei, notând elementele date în enunţ.



1. Teorema cosinusului aplicată triunghiului A M C şi A M B, ne dă

$$1)\quad \begin{cases} b\cos\alpha+\dfrac{a}{2}\cos\gamma=m \\ c\cos\beta-\dfrac{a}{2}\cos\gamma=m. \end{cases}$$

Adunând şi scâzând aceste relaţii, obţinem

$$\begin{cases} b\cos\alpha+c\cos\beta=2m \\ b\cos\alpha-c\cos\beta=-a\cos\gamma. \end{cases}$$

Prin înmulţirea acestor relaţii găsim

$$(2)\qquad b^2\cos^2\alpha-c^2\cos^2\beta+2am\cos\gamma=0.$$

Cum avem cunoscute relaţiile

$$\cos^2\alpha=\cos 2\alpha+\sin^2\alpha,\quad \cos^2\beta=\cos 2\beta+\sin^2\beta,$$

relaţia (2) devine

$$b^2 \cos 2\alpha - c^2 \cos 2\beta + (b^2 \sin^2 \alpha - c^2 \sin\beta) + 2\,a\,m \cos\gamma = 0. \tag{3}$$

De altă parte, teorema sinusului aplicată triunghiurilor A M C şi A M B, dă

$$\frac{b}{\sin\gamma} = \frac{a}{2\sin\gamma}, \quad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{2\sin\beta}, \tag{4}$$

de unde deducem

$$b \sin\alpha = c \sin\beta, \quad \text{sau} \quad b^2 \sin^2\alpha = c^2 \sin^2\beta$$

şi în virtutea acestei relaţii (3) devine,

$$b^2 \cos 2\alpha - c^2 \cos 2\beta + 2\,a\,m \cos\gamma = 0,$$

care este prima dintre relaţiile cerute.

2. Scriind relatiile (1) de mai sus sub forma

$$2\,b \cos\alpha = 2\,m - a \cos\gamma$$

$$2\,c \cos\beta = 2\,m + a \cos\gamma$$

şi înmulţindu-le, avem

$$4\,b\,c \cos\alpha \cos\beta = 4\,m^2 - a^2 \cos^2\gamma =$$

$$4\,m^2 - a^2(\cos 2\gamma + \sin^2\gamma),$$

deci

$$4\,bc \cos\alpha \cos\beta + a^2 \sin^2\gamma + a^2 \cos 2\gamma = 4\,m^2. \tag{5}$$

De altă parte, înmulţind relaţiile (4) de mai sus, avem

$$\frac{bc}{\sin^2\gamma} = \frac{a^2}{4 \sin\alpha \sin\gamma}, \quad \text{sau} \quad a^2 \sin^2\gamma = 4bc \sin\alpha \sin\beta$$

şi în virtutea acestei din urmă relaţii, (5) devine

$$4\,b\,c(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) + a^2 \cos 2\gamma = 4\,m^2,$$

sau încă,

$$4\,b\,c \cos(\alpha - \beta) + a^2 \cos 2\gamma = 4\,m^2.$$

Avem stabilită şi a 2-a relaţie de enunţ.

1. Au dat foarte bune soluţii: D-ra *Neumann Maria* şi d-nii: *Bitang Alexandru* (Polit., Timişoara), *Chiriac C.* (Lt), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Şipoş Eugen* (Polit., Timişoara), *Vişa Eugen* (Profesor) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

2. O foarte bună soluţie o fost dată de d-l *Săruleşteanu I. Emanuil*, folosind cunoştintele din articolul autorului problemei, intitulat *„Relaţii metrice într'un triunghiu'*, R. M. T., Vol. XXII, No. 7.

3. D-nii *Constantinescu N. Ilie* (Lic Brăila) şi *Enache Ion* (Lt.), au observat că relaţiile din enunţ se găsesc stabilite în articolul menţionat la No. 2, dar n'au şesizat că autorul doria o soluţie independentă de cunoştinţele speciale din acel articol.

Problema 2091. — *Să se rezolve în întregi ecuaţia*

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 1,$$

M. GHERMANESCU

Prima soluţie. Este evident că există un întreg, în primul membru, necesar de aceiaş paritate cu un întreg din al doilea căci, altfel, ar urma că u şi v sunt de aceiaş paritate, al doilea membru este impar, neapărat x şi y de paritate diferită, deci contradicţie.

Să punem atunci

$$x = \lambda + \mu, \quad u = \lambda - \mu;$$

ecuaţia dată se mai poate scrie

$$y^2 + 4\,\lambda\,\mu = v^2 + 1,$$

sau

$$y^2 + (2\,\lambda\,\mu)^2 = v^2 + (2\,\lambda\,\mu - 1)^2,$$

care este un caz particular al ecuaţiei

$$A^2 + B^2 = C^2 + D^2,$$

cu soluţia generală cunoscută

$$A = \beta\beta' + \alpha\alpha', \quad B = \alpha\beta' - \alpha'\beta, \quad C = \beta\beta' - \alpha\alpha',$$

$$D = \alpha\beta' + \beta\alpha',$$

unde $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sunt întregi arbitrari.

Pentru ecuaţia noastră, trebue ca (A, C) sau (A, D) să fie consecutive. A şi C fiind de aceiaş paritate, condiţia este îndeplinită de A şi D, sau de B şi C, care duc, prima, în ipoteza că

$$(\beta\beta' + \alpha\alpha') - (\alpha\beta' + \beta\alpha') = 1,$$

care se mai poate scrie

$$(\beta - \alpha)(\beta' - \alpha') = 1,$$

deci $\beta = \alpha + 1$, $\beta' = \alpha' + 1$, iar

$$y = B = \alpha - \alpha', \quad v = C = \alpha + \alpha' + 1,$$

$$2\,\lambda\,\mu = 2\,\alpha\,\alpha' + \alpha + \alpha' + 1,$$

din care se vede că α şi α' sunt întregi arbitrari de paritate diferită. Vom avea apoi

$$x = \lambda + \mu. \quad u = \lambda - \mu,$$

λ şi μ rezultând din expresia lui $2\,\lambda\,\mu$.

Dacă B şi C sunt consecutive, găsim acelaş rezultat, înlocuind α' prin $-\alpha'+1$.

II. *Altă soluţie.* Ecuaţia propusă se mai poate scrie

$$(x-u)(x+u)-(v-y)(v+y)=1,$$

aşa că punând $x-u=A$, $x+u=D$, $v-y=B$, $v+y=C$, dăm peste ecuaţia

$$AD-BC=1,$$

de care m'am ocupat într'un articol anterior din această revistă. (R. M. T., V. XXII, 1942, p. 115.) Se vede că perechile de numere (A, D), (B, C) sunt de aceiaş paritate, diferită dela o pereche la alta.

Notă. 1°. D-l *J. Mahrenholz* dă câteva formule ce se obţin din cele dela prima soluţie luând $\alpha=2n+1$, $\alpha'=0$; $\alpha=2n$, $\alpha'=1$; $\alpha=4np$, $\alpha'=-1$; $2\alpha=2n^2+3n+1$, $2\alpha'=n-1$.

2°. D-l *V. Pălăceanu* a dat formulele corespunzătoare la $\alpha=2q$, $\alpha'=-2m-1$; $\alpha=-2r'$, $\alpha'=-2s$.

3°. D-l *C. Tincu* a dat formulele corespunzătoare la $2\alpha=2n^2+n-1$, $2\alpha'=n-1$. *M. G.*

Problema 2116. — *Să se arate că funcţiile*

$$u=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{3}},\qquad v=\operatorname{arc\,sin}\frac{x-3}{2x}$$

diferă printr'o constantă ce se cere a se determina.

ION I. LUCA

Soluţie. Să derivăm funcţiile date, avem succesiv

$$u'=2\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}-1\right)=$$

$$\frac{6}{3+x^2+2x-3+x^2-2x\sqrt{x^2+2x-3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}}=$$

$$\frac{6}{2x(x+1-\sqrt{x^2+2x-3})}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}}=\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{x^2+2x-3}};$$

$$v'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x-(x-3)}{x^2}=$$

$$\frac{2x}{\sqrt{3x^2+6x-9}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{x^2}=\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

Vedem dar că derivatele funcţiilor date sunt egale, de unde rezultă că ele diferă printr'o constantă, adică

$$u-v=C.$$

Ne propunem să determinăm constanta C.

Pentru aceasta, observând că relaţiile date se mai pot scri sub forma

$$(1)\quad \operatorname{tg}\frac{u}{2}=\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{3}},\qquad (2)\quad \sin v=\frac{x-3}{2x},$$

vom calcula întâi $\operatorname{tg} u$ şi $\operatorname{tg} v$ în funcţie de x.

Avem succesiv

$$(3)\quad \operatorname{tg} u=\frac{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}=\frac{2\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{3-x^2-2x+3-x^2+2x\sqrt{x^2+2x-3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{x^2+2x-3}-x)}{3-x^2-x+x\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

De asemeni, din (2) deducem

$$\cos v=\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2x}\right)^2}=\frac{\sqrt{3x^2+6x-9}}{2x}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x-3}}{2x}$$

şi deci

$$(4)\quad \operatorname{tg} v=\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{x-3}{\sqrt{3}\,\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

Acum, înlocuind valorile lui $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{tg} v$ din (3) şi (4) în relaţia

$$\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v},$$

avem

$$\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{x^2+2x-3}-x)}{3-x^2-x+x\sqrt{x^2+2x-3}}-\frac{x-3}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x-3}}}{1+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{x^2+2x-3}-x)}{3-x^2-x+x\sqrt{x^2+2x-3}}\cdot\frac{x-3}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x-3}}}.$$

Efectuând calculele, obţinem

$$\operatorname{tg}(u-v)=\frac{3(\sqrt{x^2+2x-3}-x)\sqrt{x^2+2x-3}-(x-3)(3-x^2-x+x\sqrt{x^2+2x-3})}{\sqrt{3}\,(\sqrt{x^2+2x-3})(3-x^2-x+x\sqrt{x^2+2x-3})+\sqrt{3}\,(x-3)(\sqrt{x^2+2x-3}-x)}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{3(x^2+2x-3)-3x\sqrt{x^2+2x-3}-3x+x^3+x^2\sqrt{x^2+2x-3}+9-3x^2-3x+3x\sqrt{x^2+2x-3}}{3\sqrt{x^2+2x-3}-x^2\sqrt{x^2+2x-3}-x\sqrt{x^2+2x-3}+x(x^2+2x-3)+x\sqrt{x^2+2x-3}-x^2-3\sqrt{x^2+2x-3}+3x}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{x^3+x^2-x^2\sqrt{x^2+2x-3}}{x^3+x^2-x^2\sqrt{x^2+2x-3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

De aci rezultă,

$$\operatorname{tg}(u-v)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\,,$$

deci

$$u-v=\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Prin urmare am găsit valoarea constantei C,

$$C=\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Soluţii bune date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Virgil* (Polit.. Timişoara), *Birănas Ion* (Lic. Brad), *Bosie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Cârnaţiu Ion* (Lic Blaj), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Creţa Gavril* (Polit, Timişoara), *Enăchescu Ioan* (Lic. Milit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit, Timişoara), *Groza Liviu* (Lic. Deva), *Henth Martin* (student). *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Munteanu Lucian* (Polit., Timişoara), *Oprea Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara), *Pat Moise* (Polit., Timişoara), *Pălăceanu Vasile* (Lic. Milit, Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stretea A.* (Polit., Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2130. — *Dacă* N *este un număr prim, atunci expresia*

$$N^{28}-N^{16}-N^{12}+1$$

se dtvide prin numărul 38675.

CAP. EUGEN ST. IACOB

Soluţie. Descompunem întâi numărul 38675 în factori primi şi avem

$$38675=5^2.7.13.17.$$

Însemnând cu E expresia dată, putem scri

$$(1)\quad E=N^{16}(N^{12}-1)-(N^{12}-1)=(N^{12}-1)(N^{16}-1).$$

N fiind prim nu se divide prin 13 şi 17, deci conform teoremei lui *Fermat,* avem

$$N^{12}-1=N^{13-1}-1=m.13$$

$$N^{16}-1=N^{17-1}-1=m.17.$$

Rezultă, privind relaţia (1) că,

$$N=m.13.17.$$

Rămâne să mai dovedim că E se divide prin 7 şi 5^2.

Pentru aceasta, observăm că expresia E din (1) se mai poate scri sub următoarele două forme

$$(2)\quad E=(N^6-1)(N^6+1)(N^{16}-1),$$

$$(3)\quad E=(N^2-1)(N^4+N^2+1)(N^2+1)(N^4-N^2+1)\times$$
$$(N^4-1)(N^4+1)(N^8+1)=$$
$$(N^4-1)^2(N^4+N^2+1)(N^4-N^2+1)(N^4+1)(N^8+1).$$

Numărul N, fiind prim, nu se divide prin 7 şi nici prin 5, deci conform teoremei lui *Fermat*

$$N^6-1=N^{7-1}-1=m.7,$$

$$N^4-1=N^{5-1}-1=m.5.$$

Fiindcă E conţine factorul N^6-1, cum se vede din (2), rezultă că se divide prin 7, de asemeni E conţinând factorul $(N^4-1)^2$, cum se vede din (3), rezultă că se divide prin 5^2.

În definitiv E se divide prin produsul

$$13.17.7.5^2=38675,$$

ceace trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Cârnaţiu Ion* (Lic. Blaj), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Cochela Livius* (Lic. Milit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Gâţă Gheorghe* (Lic. Tg-Jiu), *Godea I.* (Polit, Timişoara), *Goldis Gheorghe* (Lic. Beiuş), *Ieşan Alexandru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Rogoz Ioan* (Lic. Milit, Timişoara), *Popescu Barbu* (Lic. Milit, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2226. — *Ştiind că un număr din textul*

$$\text{„}\overline{2}\cdot\frac{78}{5}\cdot\frac{22}{5}\cdot\frac{26}{5}\cdot2\cdot\frac{54}{5}\cdot\frac{98}{5}\cdot\frac{54}{5}:\frac{26}{5}:2\cdot\frac{54}{5}:\frac{62}{5}\cdot$$
$$\frac{66}{5}\cdot\frac{82}{5}\cdot18\cdot\frac{78}{5}\cdot\frac{98}{5}\text{“}$$

e dat de relaţia

$$y=\frac{4x+6}{5}\,,$$

unde x reprezintă numărul ce indică locul unei litere în alfabet, se cere să se descifreze textul de mai sus, cifra barată reprezentând o literă mare şi semnul: despărţind două cuvinte.

AL ŢIGANOIU

Soluţie. Din relaţia dată deducem

$$x=\frac{5y-6}{4}\,.$$

Înlocuind y succesiv prin numerele din text obţinem respectiv următoarele valori pentru x:

(1) $x = \overline{1}$, 18, 4, 5, 1, 12, 23, 12 : 5 : 1, 12, 14, 15, 19, 21, 18, 23.

Scriem acum alfabetul şi numerotăm succesiv literile începând cu 1, avem astfel

(2)
a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
q, r, s, $ş$, t, $ţ$, u, v, w, z, x, y,
17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

Cum x reprezintă numărul de ordine al literei, dacă punem deasupra numerelor, literile mici din şirul (1), corespunzătoare, iar în loc de numerile barate punem literile mari corespunzătoare şi dacă mai ţinem seamă de faptul că semnul : desparte două cuvinte, ajungem cu uşurinţă să descifrăm următorul text:

„Ardealul e al nostru“,

text săpat adânc în inimele tuturor românilor.

Soluţii bune date de d-ra *Măran Ana* (Politehnica, Timişoara) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu A. Ioan* (Lic. Caracal), *Birănaş Ioan* (Arad), *Constantinescu N. Ilie* (lic. Brăila), *Enache Ion* (Lt.), *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timişoara), *Godea I.* (Polit., Timişoara, *Goldis Gh.* (Polit., Timişoara), *Groza Liviu*, (Polit., Timişoara), *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Simcso Carol* (Lugoj), *Stanciu Petru* (Timişoara), *Tabacu Marius* (Lic. Loga, Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2257. — Să se afle patratul de patru cifre $abcd$ ştiind că $cd = xy + 6$, unde xy este rădăcina patrată a lui $abcd$.

LUCIAN MUNTEANU

2258. — Să se găsească fracţiile $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ a căror sumă este 1, ştiind că numerile a, b, c, d, scrise într'o ordine oarecare sunt în progresie aritmetică.

G-L GH. BUICLIU

2259. — Să se rezolve, în întregi, ecuaţia

$$x^4 + y^4 = z^3.$$

M GHERMANESCU

2260. — Să se calculeze maximul produsului

$$P = x^5 y^7 z^9,$$

ştiind că avem

$$xy^2 + yz^3 + z^4 x^5 = a, \quad (a \text{ constant}).$$

AL. TIGANOIU

2261. — Într'un triunghiu oarecare ABC, fie H ortocentrul, O centrul cercului circumscris, M, N, P, respectiv mijloacele laturilor BC, CA şi AB. Să se demonstreze că:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{ON}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{OP}} = 6.$$

ILIE CONSTANTINESCU

2262. — Se dă o parabolă de focar F. Tangenta într'un punct variabil M taie directoarea parabolei în punctul N.

1°. Să se găsească locul geometric al intersecţiei normalei în M la parabolă, cu paralela dusă la tangentă prin vârful parabolei.

2°. Să se găsească înfăşurătoarea dreptei NF.

EUGEN WEGENER

2263. — Să se arate că într'un triunghiu ABC, în care razele cercurilor exînscrise sunt în progresie aritmetică, există relaţia

$$b = 2p \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

EUGEN SIPOS

2264. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC, în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţia

$$p + b \cos \frac{C}{2} + c \cos \frac{B}{2} =$$

$$2\left(b \cos \frac{C}{2} \cos^2 \frac{C}{4} + c \cos \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{4}\right).$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bogza Mihai, (1413); **Braşoveanu Gh.,** (P.; 2114); **Costea Florian,** (2191, 2193, 2209, 2211, 2241); **Constantinescu Ilie,** (N; P; 2070, 2086, 2087, 2241, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247); **Dobrescu Eugen** (A; P); **Dobrotescu Gh.,** (2150, 2182, 2224, 2247); **Enache Ion,** (2125, 2156, 2198, 2209, 2231, 2233, 2241, 2244); **Goldis Gheorghe,** (P; 2131, 2138, 2178, 2203, 2207, 2209, 2211, 2213, 2228, 2233, 2237); **Măran Ana,** (2134, 2137, 2216, 2227, 2233, 2234, 2241, 2242, 2243, 2244, 2252); **Munteanu Lucian,** (P; 2122, 2213, **Popescu Barbu,** (P; 2122, 2241); **Şipoş Eugen** (P); **Stanciu Petre,** (1763, 1833, 1906 1907, 1946, 1978, 2113, 2220, 2245, 2246, 2252); **Tincu Constantin,** (1758, 1763, 1770, 1919, 1989, 2001, 2134, 2252, 2253, 2256); **Ţigănoiu Alexandru,** (2243, 2244, 2245, 2246); **Vrânceanu Gheorghe,** (P; 2233, 2234, 2237, 2241, 2245, 2249, 2250); **Wegener Eugen,** (P; 1427, 1447, 1475, 1548, 1558, 1566, 1680, 1686, 1694, 1718, 1728, 1733, 1750, 2101, 2110, 2182, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2247, 2252, 2256),

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXIV. OCTOMVRIE 1944 No. 8.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **IOAN V. MATIES:** CUBURI ISOFINALE.
2. NOTE MATEMATICE 22, 23.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE 2120, 2123, 2124. 2163, 2173, 2186, 2190.
5. PROBLEME PROPUSE: 2265—2272.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 8. TIMISOARA, OCTOMVRIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

CUBURI ISOFINALE

DE

IOAN V. MĂTIEȘ.

Analog *„patratelor isofinale“* [1] vom defini și vom studia în cele ce urmează *„cuburile isofinale“*.

În decursul tratării acestui subiect vom utiliza și teoremele cunoscute [2] și anume:

Teorema 1. *Terminațiunea de p cifre a unui cub derivă numai din cubul terminațiunii de p cifre a numărului corespunzător acelui cub.*

În adevăr putem scrie

$$N = 10^p . M + N_p \quad {}^{*}_{*} \quad N^3 = \text{Mult } 10^p + N_p^3 ,$$

N_p fiind de p cifre.

Consecință. *O terminațiune cubică de p cifre se întâlnește cel puțin odată în șirul consecutiv al cuburilor perfecte până la cubul numărului* $(10^p - 1)$

Teorema 2. *Dacă a_p și b_p, numere întregi de p cifre, unul complimentul aritmetic al celuilalt față de 10^p, au cubul terminat respectiv cu A_p și B_p, de p cifre, atunci A_p și B_p, vor fi tot complimente aritmetice față de 10^p.*

În adevăr

$$a_p^3 + b_p^3 = (a_p + b_p)^3 - 3 a_p b_p (a_p + b_p) = \text{Mult } 10^p ,$$

$$^{*}_{*} \qquad A_p + B_p = \text{Mult } 10^p .$$

Dar $A_p + B_p < 2 + 10^p \quad {}^{*}_{*} \quad A_p + B_p = 10^p$.

Consecință. *Numerele de forma*

$$N = \text{Mult } 10^p + a_p$$

și

$$M = \text{Mult } 10^p + b_p = \text{Mult } 10^p - a_p$$

putându-se scrie sub forma

$$N, M = \text{Mult } 10^p \pm a_p = 10^p n \pm a_p$$

vor avea cubul de forma

$$(10^p . n \pm a_p)^3 = \text{Mult } 10^p \pm a_p^3 = \text{Mult } 10^p \pm A_p$$

semnele corespunzându-se.

Definiția „cuburilor isofinale“. Cuburile întregi

$$x^3 = 10^p . A + F_p \quad \text{și} \quad y^3 = 10^p . B + F_p$$

având la dreapta același grup final (F_p) de p cifre, le numim *„cuburi isofinale de ordinul p“*.

Eliminând cantitatea F_p, obținem

$$x^3 - y^3 = \text{Mult } 10^p , \tag{1}$$

o congruență de gradul trei, ordinul p, în baza 10. Cuburile soluțiilor acestei congruențe se numesc *„cuburi isofinale“*.

I. **Soluția teoretică a congruenței** (1). Urmând calea indicată în articolul *Rezolvarea congruențelor de gradul n și ordinul p,* publicat în „R. M. T.“, vol. XXIV, pag. 1—5, avem:

Congruența (1) are ca soluție generală pe

$$x = x_p + 10^p . A \quad \text{și} \quad y = y_p + 10^p . B, \tag{2}$$

unde x_p și y_p sunt numere de p cifre, care formează totalitatea soluțiilor congruenței

$$x_p^3 - y_p^3 = \text{Mult } 10^p . \tag{3}$$

Fie că avem:

$$x_p = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1} \quad \text{și} \quad y_p = \overline{\beta_p \beta_{p-1} \ldots \beta_2 \beta_1} , \tag{4}$$

în care cifrele α_1 și $\beta_1 < 10$ sunt date de cogruența inițială:

$$\alpha_1^3 - \beta_1^3 = M . 10, \tag{5}$$

iar cifrele $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ și $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$ sunt date

---

[1] *I. V. Mătieș:* Patrate isofinale, *„Gazeta Matematică“*, Nr. 7, Anul XLIX, 1944.

[2] *I. V. Mătieș:* Terminațiunile cuburilor perfecte și a rădăcinilor lor din *„Gazeta Matematică“*, vol XLI, pag. 332.

de seria de congruențe intermediare de gradul și ordinul prim de forma:

(6) $a_i + b_i \times \alpha_i + c_i \times \beta_i = M.10 \quad (i = 2, \ldots, p)$,

în număr de $(p-1)$ congruențe deduse una după alta din

$$x_{i-1}^3 - y_{i-1}^3 + (3.x_{i-1}^2 \times \alpha_i - 3.y_{i-1}^2 \times \beta_i).10^{i-1} = M.10^i,$$

$^{*}_{**}$ (6′) $$\frac{x_{i-1}^3 - y_{i-1}^3}{10^{i-1}} + 3.x_{i-1}^2 \times \alpha_i - 3.y_{i-1} \times \beta_i = M.10,$$

în care se cunosc deja x_{i-1} și y_{i-1}. Dacă facem pe $i = 2, 3, \ldots, p$, obținem seria de congruențe (6) din (6′), congruență după congruență, care dau respectiv cifrele $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ precum și $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$ ale numerelor x_p și y_p.

Observare. Din congruența (1), dacă punem $y^3 \equiv F_p$, (Mod 10^p), obținem

(7) $$x^3 = F_p + M.10^p,$$

o congruență cu o necunoscută, dacă dăm valorile posibile lui F_p.

Soluțiile ei sunt:

(7′) $$x = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1} + M\,2^{p_1}.5^{p_2},$$

unde $p_1, p_2 \leqq p$ în conformitate cu cele arătate în articolul citat.

II. **Soluția numerică a congruenței** (1). Fie $x = N$ și $y^3 \equiv F_p$ (Mod 10^p), avem din (1)

(8) $$N^3 = F_1 + \text{Mult}\,10^p$$

o congruență de gradul 3 și ordinul p.

Vom soluționa complet această congruență pentru $p = 1, 2, 3$ și 4.

1° *Cuburile isofinale de ordinul prim* se află rezolvând congruența inițială, care este:

(9) $$N^3 = \pm u + M.10 \quad (u \leqq 5,\ p = 1)$$

și are ca soluție pe

(10) $$N = 10n \pm \alpha_1 \quad (\alpha_1 \leqq 5),$$

dacă avem $\alpha_1^3 = \pm u + M.10$.

Fie

$$\alpha_1 = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4 \text{ și } 5,$$

$^{*}_{**}$ (11) $\alpha_1^3 \equiv 0;\ \pm 1 \mp 2;\ \mp 3;\ \pm 4$ și 5 (Mod. 10),

iar din (9), (10) și (11) obținem rezultatele din:

TABLOUL 1

N	$10n$	$10n \pm 1$	$10n \mp 2$	$10n \mp 3$	$10n \pm 4$	$10n+5$
N^3/u	0	± 1	± 2	± 3	± 4	5

în care semnele se corespund, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, iar N^3/u se citește N^3 se termină cu cifra u.

Cuburile numerelor N se numesc *„cuburi isofinale de ordinul prim"* fiind terminate respectiv cu valorile cifrei (u) date în tablou în rândul N^3/u.

2°. *Cuburi isofinale de ordinul doi.* Determinarea lui N, astfel ca N^3 să se termine cu $\overline{zu}$ terminațiune cubică de două cifre, se face astfel:

Luăm

(12) $$N = 10n_1 \pm \alpha_1 \quad (\alpha_1 < 10),$$

α_1 și n_1 luând toate valorile din tabloul 1, vom impune condiția ca N^3 să se termine cu grupa $\overline{zu}$, avem:

$$\pm \alpha_1^3 + 30\,\alpha_1^2.n_1 = \pm \overline{zu} + M.100$$

$^{*}_{**}$ $$30\,\alpha_1^2.n_1 = \pm (zu - \alpha_1^3) + M.100$$

și cum $\alpha_1^3 \equiv \overline{z'u}$, găsim

(13) $$3\,\alpha_1^2.n_1 = \pm (z - z') + M.10,$$

o congruență de gradul prim în n_1, α_1 luând toate valorile din tabloul 1, iar z' fiind cifra zecilor lui α_1^3.

Avem următoarele cazuri:

a) $\alpha_1 = u = 0$ $^{*}_{**}$ $N = 10n$. Congruența (13) este

$$0.n_1 = \pm z + M.10$$

și are ca soluție $n_1 = n_2$ și $z' = z = 0$. Relația (12) devine

$$N = 10n_2, \quad N^3 \text{ se termină cu } 00.$$

b) $\alpha_1 = u = 1$ $^{*}_{**}$ $N = 10n_1 \pm 1$. Congruența (13) este

$$3n_1 = \pm z + M.10$$

$^{*}_{**}$ $$n_1 = \mp 3z + 10n_2,$$

iar din (12) obținem

$$N(z) = 100n_2 \mp (30.z - 1).$$

c) $\alpha_1 = -u = -2$ $^{*}_{**}$ $N = 10n_1 \mp 2$. Congrueța (13) este

$$2n_1 = \pm (z + 1) + M.10$$

$^{*}_{**}$ $$n_1 = \pm \frac{z+1}{2} + 5n_2, \quad z \text{ fără soț}$$

şi din (12) obţinem

$$N(z) = 50\,n_2 \pm (5z + 3), \quad (z = 1, 3, 5, 7, 9),$$

N^3 se termină cu $\pm \overline{z\,2}$, z fiind cifră fără soţ.

d) $\alpha_1 = -u = -3$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $N = 10\,n_1 \mp 3$. Congruenţa (13) este

$$7\,n_1 = \pm (z + 3) + M.10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad n_1 = \pm (3.z - 1) + 10\,n_2$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad N(z) = 100.n_2 \pm (30.z - 13).$$

e) $\alpha_1 = u = 4$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $N = 10\,n_1 \pm 4$. Congruenţa (13) este

$$8\,n_1 = \pm (z - 6) + M.10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad -2\,n_1 = \pm (z - 6) + M.10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad n_2 = \mp \frac{z-6}{2} + 5\,n_2, \quad (z = 0, 2, 4, 6, 8)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad N(z) = 50\,n_2 \mp (5z + 16) \quad (z = 0, 2, 4, 6, 8).$$

f) $\alpha_1 = u = 5$ $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $N = 10\,n_1 + 5$. Congruenţa (13) este

$$5\,n_1 = (z - 2) + M.10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad n_1 = \frac{z-2}{5} + 2\,n_2, \quad (z = 2, 7)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad N(z) = 20\,n_2 + (2z + 1), \quad \overline{z\,5} = 25, 75.$$

Rezultatele dela a), b), c), d), e), f) formează

TABLOUL 2

	N	N^3/u	N (z)	N^3/zu	z
1	$10\,n$	0	$10\,n$	$z0$	0 – – – – – – – – –
2	$10\,n \pm 1$	± 1	$100\,n \mp (30\,z - 1)$	$\pm z1$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
3	$10\,n \mp 2$	± 2	$50\,n \pm (5z + 3)$	$\pm z2$	– 1 – 3 – 5 – 7 – 9
4	$10\,n \mp 3$	± 3	$100\,n \pm (30z - 13)$	$\pm z3$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
5	$10\,n \pm 4$	± 4	$50\,n \mp (5z + 16)$	$\pm z4$	0 – 2 – 4 – 6 – 8 –
6	$10\,n + 5$	$+5$	$20\,n + (2z + 1)$	$\pm z5$	– – 2 – – – – 7 – –

în care semnele se corespund, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Cuburile numerelor N (z) sunt *„cuburile isofinale de ordinul doi“*.

3°. *Cuburi isofinale de ordinul trei.* Luăm ca bază de plecare o clasă de cuburi isofinale de ordinul doi, având ca rădăcină cubică una din cele 6 numere din tabloul 2. Dăm lui z valorile din coloana z, obţinem pentru N (z) şi $\overline{zu}$ valori corespunzătoare şi ridicând apoi pe N (z) la cub, impunând condiţia ca N^3 să se termine cu $\overline{s\,z\,u}$, vom găsi o congruenţă de gradul şi ordinul prim [corespunzătoare lui (6)], care ne va da pe $n\,(s)$ şi apoi pe N (s).

Iată un exemplu: Fie N (z) dela No. 4, avem succesiv:

$$N = 100\,n_2 \pm (30.z - 13)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad N^3 = \pm (30.z - 13)^3 + 300.(30.z - 13)^2.n_2 + M.10^3$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad 300.(30.z - 13)^2.n_2 = \pm [\overline{sz3} - (30z - 13)^3] + M.10^3$$

$$300\,(-13)^2.n_2 = \pm [s - s']\,100 + M.10^3$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad -7\,n_2 = \pm (s - s') + M.10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad 3\,n_2 = \mp (s - s') + M.10$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad n_2 = \pm 3\,(s - s') + 10\,n_3$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad N(s) = 1000\,n_3 \pm [300\,(s - s') + 30\,z - 13],$$

N^3 terminat fiind cu $\pm\, s\,z\,3$, iar s' fiind cifra sutelor din $(30\,z - 13)^3$.

Facem pe $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, obţinem 10 forme generale pentru N (s) şi anume:

$N(s) = 1000.n \pm (300\,s - 413)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,03}$,

$N(s) = 1000.n \pm (300\,s + 317)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,13}$,

$N(s) = 1000.n \pm (300\,s - 353)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,23}$,

$N(s) = 1000.n \pm (300\,s - 423)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,33}$,

$N(s) = 1000.n \pm (300\,s + 107)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,43}$,

$N(s_1) = 1000.n \mp (300\,s_1 + 63)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,53}$ (sau $\mp \overline{s_1\,47}$),

$N(s_1) = 1000.n \mp (300\,s_1 + 333)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,63}$ (sau $\mp \overline{s_1\,37}$),

$N(s_1) = 1000.n \mp (300\,s_1 + 3)$, N^3 terminat cu $\mp \overline{s\,73}$ (sau $\mp \overline{s_1\,27}$),

$N(s_1) = 1000.n \mp (300\,s_1 + 73)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,83}$ (sau $\pm \overline{s_1\,17}$),

$N(s_1) = 1000.n \mp (300\,s_1 - 457)$, N^3 terminat cu $\pm \overline{s\,93}$ (sau $\mp \overline{s_1\,07}$),

Procedând analog şi cu celelalte valori ale lui $N(z)$, găsim rezultale date în:

TABLOUL 3

$N(s)$ esre rădăcina cuburilor isofinale de ordinul trei.

	N	$N^3/z\,u$	$N(s)$	$N^3/s\,z\,u$	s
1	$10\,n$	00	$10\,n$	$s\,00$	0
2	$100\,n \pm 1$	± 01	$1000\,n \mp (300\,s-1)$	$\pm s\,01$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
3	$100\,n \mp 13$	± 03	$1000\,n \pm (300\,s-413)$	$\pm s\,03$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
4	$50\,n \mp 16$	± 04	$250\,n \pm (75\,s+59)$	$\pm s\,04$	−1 − 3 − 5 − 7 − 9
5	$100\,n \pm 43$	± 07	$1000\,n \pm (300\,s-457)$	$\pm s\,07$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
6	$50\,n \pm 2$	± 08	$250\,n \mp (75\,s-2)$	$\pm s\,08$	0 − 2 − 4 − 6 − 8 −
7	$100\,n \mp 31$	± 09	$1000\,n \mp (300\,s+431)$	$\pm s\,09$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
8	$100\,n \mp 29$	± 11	$1000\,n \mp (300\,s+229)$	$\pm s\,11$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
9	$50\,n \pm 8$	± 12	$250\,n \mp (75\,s+117)$	$\pm s\,12$	−1 − 3 − 5 − 7 − 9
10	$100\,n \pm 17$	± 13	$1000\,n \pm (300\,s+317)$	$\pm s\,13$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
11	$50\,n \pm 6$	± 16	$250\,n \pm (75\,s+106)$	$\pm s\,16$	0 − 2 − 4 − 6 − 8 −
12	$100\,n \mp 27$	± 17	$1000\,n \pm (300\,s+73)$	$\pm s\,17$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
13	$100\,n \pm 39$	± 19	$1000\,n \mp (300\,s+61)$	$\pm s\,19$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
14	$100\,n \pm 41$	± 21	$1000\,n \mp (300\,s+259)$	$\pm s\,21$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
15	$100\,n \pm 47$	± 23	$1000\,n \pm (300\,s-353)$	$\pm s\,23$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
16	$50\,n \pm 24$	± 24	$250\,n \pm (75\,s-76)$	$\pm s\,24$	0 − 2 − 4 − 6 − 8 −
17	$20\,n \pm 5$	± 25	$40\,n \pm (4\,s+1)$	$\pm s\,25$	−1 − − − − 6 − − −
18	$100\,n \pm 3$	± 27	$1000\,n \pm (300\,s+3)$	$\pm s\,27$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
19	$50\,n \pm 12$	± 28	$250\,n \mp (75\,s-37)$	$\pm s\,28$	−1 − 3 − 5 − 7 − 9
20	$100\,n \pm 9$	± 29	$1000\,n \mp (300\,s-109)$	$\pm s\,29$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
21	$100\,n \pm 11$	± 31	$1000\,n \mp (300\,s+89)$	$\pm s\,31$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
22	$50\,n \pm 18$	± 32	$250\,n \mp (75\,s-118)$	$\pm s\,32$	0 − 2 − 4 − 6 − 8 −
23	$100\,n \mp 23$	± 33	$1000\,n \pm (300\,s-423)$	$\pm s\,33$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
24	$50\,n \mp 4$	± 36	$250\,n \pm (75\,s+71)$	$\pm s\,36$	−1 − 3 − 5 − 7 − 9
25	$100\,n \pm 33$	± 37	$1000\,n \pm (300\,s+333)$	$\pm s\,37$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
26	$100\,n \mp 21$	± 39	$1000\,n \mp (300\,s-79)$	$\pm s\,39$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
27	$100\,n \mp 19$	± 41	$1000\,n \mp (300\,s-281)$	$\pm s\,41$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
28	$100\,n \pm 7$	± 43	$1000\,n \pm (300\,s+107)$	$\pm s\,43$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
29	$50\,n \pm 14$	± 44	$250\,n \pm (75\,s-11)$	$\pm s\,44$	−1 − 3 − 5 − 7 − 9
30	$100\,n \mp 37$	± 47	$1000\,n \pm (300\,s+63)$	$\pm s\,47$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
31	$50\,n \pm 22$	± 48	$250\,n \mp (75\,s+28)$	$\pm s\,48$	0 − 2 − 4 − 6 − 8 −
32	$100\,n \pm 49$	± 49	$1000\,n \mp (300\,s+151)$	$\pm s\,49$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

în care semnele se corespund şi $n = 0, 1, 2, \ldots$

4° *Cuburi isofinale de ordinul patru.* În mod analog, luând pe rând expresiile generale $N(s)$ şi calculând la fiecare pe $N(1)$, $N(2), \ldots, N(9)$, le vom ridica la cub şi punând condiţia ca N^3 să se termine cu $\overline{m\,s\,z\,u}$, vom găsi expresiile generale $N(m)$, având cuburile terminate respectiv cu aceste grupe finale de patru cifre.

În ce priveşte calculul vom întâlni următoarele patru cazuri:

a) $\overline{szu} = 000$. $N = 10n$. Ridicăm la cub şi punând condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm \overline{m000}$, avem

$$N^3 = 1000n^3 = \pm m000 + M10^4$$

$$\overset{*}{**} \qquad n^3 = \pm m + M.10.$$

Punem $n = \pm a + M.10$ şi avem $m = \pm a^3$ şi deci expresia lui N este:

$$N(m) = M.100 \pm 10a \text{ cu } m = a^3 \text{ şi}$$

$$(N^3/\overline{mszu}) = \pm m000.$$

b) $\overline{szu}$ *fără soţ şi nedivizibil cu 5.* În acest caz N se termină cu ± 1 sau ± 3, fiind de forma:

$$N_1 = 1000n_1 \pm \overline{cb1}, \qquad N_2 = 1000n_2 \pm \overline{cb3},$$

$$N_3 = 1000n_3 \pm \overline{cb7} \text{ şi } N_4 = 1000n_4 \pm \overline{cb9}.$$

Să ridicăm la cub, punem condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm \overline{mszu}$ şi găsim:

$$\begin{cases} N_1^3 = \pm (cb1)^3 + 3000n_1 + M.10^4 \\ N_2^3 = \pm (cb3)^3 + 7000n_2 + M.10^4 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} N_3^3 = \pm (cb7)^3 + 7000n_3 + M.10^4 \\ N_4^3 = \pm (cb9)^3 + 3000n_4 + M.10^4 \end{cases}$$

$$\overset{*}{**} \quad \begin{cases} \pm \overline{m'_2 szu} + 3000n_1 = \pm \overline{mszu} + M.10^4 \\ \pm \overline{m'_2 szu} + 7000n_2 = \pm \overline{mszu} + M.10^4 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \pm \overline{m'_3 szu} + 7000n_3 = \pm \overline{mszu} + M.10^4 \\ \pm \overline{m'_2 szu} + 3000n_4 = \pm \overline{mszu} + M.10^4 \end{cases}$$

$$\overset{*}{**} \quad \begin{cases} 3n_1 = \pm (m - m'_2) + M.10 \\ 7n_2 = \pm (m - m'_2) + M.10 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} 7n_3 = \pm (m - m'_3) + M.10 \\ 3n_4 = \pm (m - m'_4 + M.10 \end{cases}$$

$$\overset{*}{**} \quad \begin{cases} n_1 = \mp (3m - 3m'_1) + M.10 \\ n_2 = \pm (3m - 3m'_2) + M.10 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} n_3 = \pm (3m - 3m'_3) + M.10 \\ n_4 = \pm (3m - 3m'_4) + M.10 \end{cases}$$

Introducem aceste valori în N_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, găsim:

$$(14) \begin{cases} \text{I. } N_1(m) = M.10^4 \mp (3000m - 3000m'_1 - cb1) \\ \text{II. } N_2(m) = M.10^4 \pm (3000m - 3000m'_2 + cb3) \\ \text{III. } N_3(m) = M.10^4 \pm (3000m - 3000m'_3 + cb7) \\ \text{IV. } N_4(m) = M.10^4 \mp (3000m - 3000m'_4 - cb9) \end{cases}$$

unde $m'_{1,2,3,4}$ este cifra miilor lui $(\overline{cba})^3$, $a = 1, 3, 7, 9$.

Exemplu numeric *Să se găsească forma generală a numerelor, având cubul terminat cu* $\pm \overline{m003}$.

Din tabloul 3, scoatem

$N = 1000n \mp 413$, sau ± 587, N^3 terminat cu $\pm \overline{003}$.

Ridicăm la cub şi punând condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm \overline{m003}$, avem

$$N^3 = \mp 4997 + 700n = \pm m003 + M.10^4,$$

$$\overset{*}{**} \qquad 7n = \pm (m + 5) + M.10,$$

$$\overset{*}{**} \qquad n = \pm (3m + 5) + M.10,$$

$$\overset{*}{**} \quad N(m) = M.10^4 \pm (3000m + 4587).$$

Acest rezultat îl găsim şi aplicând relaţia (III) din (14), căci $\overline{cba} = +587$ $\overset{*}{**}$ $m' = 2$ şi deci

$$N(m) = M,10^4 \pm (3000m - 6000 + 587)$$

$$\overset{*}{**} \quad N(m) = M.10^4 \pm (3000m + 4587)$$

(căci $-6000 = 4000 + M.10^4$),

având N^3 terminat cu $\pm \overline{m003}$ şi trecut în tabloul 4 sub No. 3.

c) $\overline{szu}$ *se termină cu 5.* Avem numai valorile $\overline{szu} = \pm 125$ şi ± 375.

Din tabloul 3 găsim că N e de forma:

$$N = 40n \pm 5 \text{ şi } 40n \pm 15,$$

care se mai pot scrie:

$$N = 200n \pm \overline{cb5}.$$

Îl ridicăm la cub şi găsim

$$N^3 = \pm \overline{m'sz5} + 5000n + M.10^4.$$

Punem condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm \overline{msz5}$, găsim:

$$5000n \pm (m - m').1000 + M.10^4,$$

$$\overset{*}{**} \qquad 5n = \pm (m - m') + M.10,$$

$$n = \pm \frac{m - m'}{5} + M.2 \quad (m = m' + M.5).$$

Valoarea lui N este:

(15) $N(m) = \mathbf{M} \cdot 400 \pm (40\,m - 40\,m' + \overline{c\,b\,5})$,

cu $m = m' + M \cdot 5$.

$a\,b\,5 = \pm 005$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$m' = 0$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$N(m) = M \cdot 400 \pm (40\,m + 5)$, $m = 0$ şi 5
$a\,b\,5 = \mp 35$, sau ± 165	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$m' = 2$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$N(m) = M \cdot 400 \pm (40\,m + 85)$, $m = 2$ şi 7
$a\,b\,5 = \pm 45$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$m' = 1$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$N(m) = M \cdot 400 \pm (40\,m + 5)$, $m = 1$ şi 6
$a\,b\,5 = \mp 75$, sau ± 125	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$m' = 3$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$N(m) = M \cdot 400 \pm (40\,m + 5)$, $m = 3$ şi 8
$a\,b\,5 = \pm 85$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$m' = 4$	$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$	$N(m) = M \cdot 400 \pm (40\,m - 75)$, $m = 4$ şi 9.

Pentru cazul particular $\overline{s\,z\,u} = \pm 125$, avem $N = 40\,n \pm 5$ şi deci

În rezumat avem rezultatele generale următoarele:

$$(16)\quad \begin{cases} N(m) = 400\,n \pm (40\,m + 5), & m = 0, 1, 3, 5, 6 \text{ şi } 8 \\ N(m) = 400\,n \pm (40\,m + 85), & m = 2 \text{ şi } 7 \\ N(m) = 400\,n \pm (40\,m - 75), & m = 4 \text{ şi } 9 \end{cases}$$

având cuburile terminate cu $\pm \overline{m\,125}$. În mod analog se tratează şi cazul $\pm \overline{m\,375}$.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

22. — *Solution complète de quelques équations diophantiennes.*

Les 3 équations diophantiques

(1) $-m x^2 + (m + k^2) y^2 = z^2, \quad m > 0,$

(2) $m x^2 + (-m + k^2) y^2 = z^2, \quad m > 0,$

(3) $m x^2 + n x y + (k^2 - m - n) y^2 = z^2,$

m et n, $>$ ou $<$,

admettent respectivement les solutions entièrs particulières:

(1) $x = 1, \quad y = 1, \quad z = k,$

(2) $x = 1, \quad y = 1, \quad z = k,$

(3) $x = 1, \quad y = 1, \quad z = k.$

Il résulte d'un théorème general [1] sur l'équation

$$f(x, y) \equiv a x^2 + b x y + c y^2 - e z^2 = 0$$

dont tous les coefficients sont entiers avec $e \neq 0$ et le discriminant $d = b^2 - 4\,a\,c$ n'est pas un carré parfait que toutes les solutions entières de ces 3 équations sont données par les formules:

$$(1)\quad \begin{cases} x = \varrho\,[m u^2 - 2(m + k^2) n v + (m + k^2) v^2] \\ y = \varrho\,[-m u^2 + 2 m n v - (m + k^2) v^2] \\ z = \varrho\,k\,[m u^2 + (-m + k^2) v^2], \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x = \varrho\,[-m u^2 - 2(m + k^2) u v + (-m + k^2) v^2] \\ y = \varrho\,[m u^2 - 2 m u v - (-m + k^2) v^2] \\ z = \varrho\,k\,[m u^2 \pm (-m + k^2) v^2] \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x = \varrho[-(m+n) u^2 - 2(k^2 - m - n) u v + (k - m - n) v^2] \\ y = \varrho[m u^2 - 2 m u v - (k^2 - m) v^2] \\ z = \varrho\,k\,[m u^2 + n u v + (k^2 - m - n) v^2, \end{cases}$$

u et v sont des entiers premiers entre eux et ϱ est un facteur de proportionnalité.

Exemples.

ad (1)

$-2 x^2 + 3 y^2 = z^2$

$$\begin{cases} x = \varrho\,(2 u^2 - 6 u v + 3 v^2) \\ y = \varrho\,(-2 u^2 + 4 u v - 3 v^2) \\ z = \varrho\,(-2 u^2 + 3 v^2) \end{cases}$$

$u = 4, \quad v = 3, \quad 3 \cdot 11^2 - 2 \cdot 13^2 = 5^2.$

$-2 x^2 + 11 y^2 = z^2$

$$\begin{cases} x = \varrho\,(2 u^2 - 22 u v + 11 v^2) \\ y = \varrho\,(-2 u^2 + 4 u v - 11 v^2) \\ z = 3\,\varrho\,(-2 u^2 + 11 v^2), \end{cases}$$

$u = 2, \quad v = 1, \quad 11 \cdot 11^2 - 2 \cdot 25^2 = 9^2$

ou

$$11 \cdot 11^2 - 2 \cdot 5^4 = 3^4,$$

solution numérique de

$$11 y^2 - 2 x^4 = z^4.$$

ad (2) $m = 3, \quad k = 2,$

[1] voir p. ex. *Dickson, Introduction to the theory of numbers*, page 39 et sq.

$3x^2+y^2=z^2$ $\begin{cases} x=\varrho(-3u^2-2uv+v^2) \\ y=\varrho(3u^2-6uv-v^2) \\ z=2\varrho(3u^2+v^2). \end{cases}$

$u=2,\quad v=1,\quad 3.15^2+1^2=26^2,$

$u=3,\quad v=2,\quad 3.35^2+13^2=62^2=(2.31)^2.$

$u=4,\quad v=2,\quad 3.21^2+11^2=38^2.$

ad (3) $m=3,\quad n=5$

$3x^2+5xy-7y^2=z^2$ avec

$$x=\varrho(-8u^2+14uv-7v^2)$$
$$y=\varrho(3u^2-6uv+2v^2)$$
$$z=\varrho(3u^2+5uv-7v^2).$$

$u=2,\quad v=1$

$$3.(-11)^2+5(-11).2-7.2^2=15^2.$$

$u=3,\quad v=2$

$$3.16^2+5.16.1-7.1^2=29^2$$

ou

$$3.2^8+5.2^4.1-7.1^2=29^2.$$

On a aussi

$$\begin{cases} x=\varrho(-8u^2+2uv-v^2) \\ y=\varrho(3u^2-v^2) \\ z=\varrho(3u^2-11uv+v^2). \end{cases}$$

$u=2,\quad v=1$

$$3(-29)^2+5(-29).11-7.11^2=9^2.$$

$u=1,\quad v=2$

$$3.8^2+5.8.1-7.1^2=15^2$$

ou

$$3.2^6+5.2^3.1-7.1^2=15^2.$$

$u=3,\quad v=2$

$$3.(-64)^2+5(-64).23-7.23^2=35^2$$

ou

$$3.(-2)^{12}-5(+2)^6.23-7.23^2=35^2.$$

$u=2,\ v=3$

$$3.(-29)^2+5(-29).3-7.3^2=45^2.$$

A. GLODEN.
(LUXEMBOURG)

---

23. — *Asupra problemei 2091,*

În această problemă, rezolvată la pag. 83, ceream rezolvarea în întregi a ecuației

$$x^2+y^2=u^2+v^2+1.$$

Pe lângă cele două soluții ce am dat la locul arătat, iată și o a treia. Putem scrie

$$x^2-u^2=v^2-y^2+1.$$

Primul membru, fiind o diferență de două pătrate, este un produs de doi factori de aceiaș paritate, deci membrul al doilea este impar, adică v și y sunt de aceiaș paritate, sau este par, adică v și y sunt de paritate diferită. Cum membrul al doilea trebue să fie, în acest caz, divizibil prin 4, trebue ca v să fie par, iar y impar.

Deci soluția generală a ecuației propuse se obține luând v și y arbitrari, de aceiaș paritate sau v par și y impar.

M. G.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, Nrul 1, Septemvrie 1944. Lista membrilor Societății „Gazeta Matematică". Membrii decedați. Premiile, bursele și publicațiile „Gazeta Matematică". Asupra unei chestiuni de examen, de *Virgil Ghițescu*. Raport pentru acordarea premiului „General *Scarlat Panaitescu*", de Ing. *Al. Bunescu*, Maior *Dragomirescu-Buzne*, Căpitan *Aurelian Stan*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Mathematica*, vol. XX, 1944. Omagiu D-lui *Dimitrie Pompeiu*. Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de „coordonnées". Contribution à l'histoire de la Géométrie Analytique, par *Gino Loria*. Sur les cycles de *Laplace* de période quatre, par *Eph. Marcus*. L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure, par *Gustave Choquet*. Sur la déformation autour d'un point, par *C. C. Teodoresco*. Sur une solution opératoire de l'équation de la propagation des ondes, par *Mircea Drăganu*. Sur la représentation conforme des aires planes, par *Arnaud Denjoy*. Sur quelques précautions nécessitées par l'exposé des conditions générales propres à l'intervention d'un groupe, par *Georges Bouligand*. Remarques sur l'association d'un groupe à une propriété au sens de *M. G. Bouligand*, par *Jean-Louis Destouches*. Geometrische Eigenschaften der partiellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, von *G. Vrânceanu*. Sur la distribution des axes principaux d'inertie, par *Victor Vâlcovici*. Sur la détermination des fonctions harmoniques par leurs valeurs sur des variétés caractéristiques, par *Nicolas Ciorănescu*. Sur la nature fonctionnelle des fonctions Quasi-Analytiques générales, par *Al Ghica*. Sur une méthode d'investigation utilisée pour résoudre certains problèmes de la Chimie du Sol par *Radu Badesco*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2120. — *Intr'un triunghiu în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţia*

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=\frac{r^2}{2p^2}(\sin A+\sin B+\sin C)^2$$

EUGEN SIPOS

Soluţie. In virtutea relaţiilor bine cunoscute

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2},\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c}{bc},$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc},$$

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B+\sin C,$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=s=pr$$

şi a relaţiilor analoage, primul membru al relaţiei cerute se poate scri succesiv

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)$$

$$=8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=8\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=8\frac{p(p-a)}{bc}\cdot\frac{p(p-b)}{ca}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}\cdot\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}$$

$$=8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cdot\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}$$

$$=\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2\frac{s^2}{2p^4}$$

$$=(\sin A+\sin B+\sin C)^2\cdot\frac{p^2r^2}{2p^4}$$

$$=\frac{r^2}{2p^2}(\sin A+\sin B+\sin C)^2.$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Au dat soluţii bune, dar diferite şi unele mai lungi d-ra *Măran Ana* (Polit., Timişoara), şi d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Avram Cristache* (Lic, Brăila), *Bolcas* (Lic. Beiuş), *Barbu Virgil* (Polit., Timişoara), *Bitang Alexandru* (Polit, Timişoara), *Bosie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Brasoveanu Gheorghe* (Lic. T.-Severin), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Costea Fl.* (Lic. Beiuş), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Creţa Gavril* (Polit., Timişoara), *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Enache Ion* (Lt.), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit. Timişoara), *Gâţă Gheorghe* (Lic. Tg.-Jiu), *Gligor N. Ioan*, (student, Timişoara), *Godea Ioan* (Polit, Timişoara), *Goldiş Gh.* (Lic. Beiuş), *Grozescu Liviu* (Polit., Timişoara), *Iacob Şt. Eugen* (Căpitan), *Ieşan Alexandru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu Petre* (Craiova), *Ionescu C. Victor* (Ialomiţa), *Logofătu T.* (Lic. Beiuş), *Lupescu Corneliu* (Lt. Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Maliţa Mircea* (Lic. Beiuş), *Marinescu N., Mazilu Marius* (Lic. Caransebeş), *Miclea N.* (Polit., Timişoara), *Munteanu Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Oprea D. Gheorghe* (Lic. Milit, Timişoara), *Oprea D. Nifon* (Lic. Milit., Timişoara), *Pat Moise* (Polit., Timişoara), *Păläceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit, Timişoara), *Ştefănescu Marin* (Lt. Brăila), *Stretea Alexandru* (Polit., Timişoara), *Tică P. Marin-Gal* (Căpitan), *Tincu C. C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Tolvan Mircea* (Lic. Beiuş), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2123. — *Dacă* n *este număr prim să se arate că expresia*

$$E=n^{94}-n^{66}-n^{28}+1$$

se divide cu 1943.

CAP. EUGEN ŞT. IACOB

Soluţia d-lui Lt. Chiriac C-tin. Descompunând pe 1943 în factori primi, avem:

$$1943=29\times 67.$$

Expresiunea dată se poate scri succesiv

$$E=n^{28+66}-n^{66}-n^{28}+1$$

$$E=n^{28}(n^{66}-1)-(n^{66}-1)$$

$$E=(n^{28}-1)(n^{66}-1) \qquad (1)$$

Conform enunţului n fiind număr prim, este prim şi cu $29=28+1$ şi $67=66+1$ factorii primi ai lui 1943.

Deci, conform teoremei lui *Fermat* avem:

$$n^{29-1}-1=m\cdot 29$$

$$n^{67-1}-1=m\cdot 67.$$

Inlocuind în (1) avem

$$E=m\cdot 29\cdot m\cdot 67=m\cdot 1943.$$

Alte soluţii analoage date de d-nii: *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Cârnaţiu Ion* (Lic. Blaj), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Filimon Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Gâţă Gheorghe* (Lic. T.-Jiu), *Ieşan Alexandru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ionescu Petre* (Craiova), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Rogoz Ion* (Lic. Milit., Timişoara), *Ştefănescu Marin* (Lt. Brăila), *Tincu C-tin* Lic Loga, Timişoara), *Ţigănoiu Al.* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2124. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x(x+1)=a(x+y+1), \\ y(y+1)=b(x+y+1). \end{cases}$$

LT. ADRIAN POPESCU

Soluție. Scădem ecuația 2-a din prima și avem

$$x^2-y^2+x-y=(a-b)(x+y+1),$$

sau

$$(x-y)(x+y+1)=(a-b)(x+y+1).$$

De aci deducem

(1) $x+y+1=0$, sau (2) $x-y=a-b$

In virtutea ecuației (1), prima ecuație a sistemului devine

$$x(x+1)=0.$$

Astfel avem,

$$\begin{cases} x(x+1)=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

Acest sistem admite evident sistemele de soluții

(3) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ și (4) $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Acum luăm ecuația (2) și una din ecuațiile sistemului dat, prima de exemplu, și avem sistemul

(5) $$\begin{cases} x(x+1)=a(x+y+1) \\ x-y=a-b \end{cases}$$

Din ecuația 2-a din (5) scoatem

(6) $$y=x-a+b,$$

valoare care înlocuind-o în prima ecuație din (5), ne dă

$$x(x+1)=a(x+x-a+b+1),$$

sau

$$x^2-(2a-1)x-a(b-a+1)$$

De aci deducem

$$x=\frac{2a-1\pm\sqrt{1+4ab}}{2}.$$

Inlocuind această valoare a lui x, în (6), găsim făcând calcule

$$y=\frac{2b-1\pm\sqrt{1+4ab}}{2}.$$

Sistemul (5) admite astfel sistemele de soluții

(7) $$\begin{cases} x=\dfrac{2a-1\pm\sqrt{1+4ab}}{2} \\ y=\dfrac{2b-1\pm\sqrt{1+4ab}}{2} \end{cases}$$

Rezultă că sistemul de ecuații dat, admite sistemele de soluții (3), (4) și (7).

Soluții date de d-rele *Măran Ana* (Polit., Timișoara) *Tarța Valeria* (Polit., Timișoara) și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Avram Cristache* (Lic. Brăila), *Barbu Virgil* (Polit., Timișoara), *Biranaș Ion* Lic. Brad), *Cârnațiu Ion* (Lic Blaj), *Constantinescu Ilie* (Lic Brăila), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Creța Gavril* (Polit, Timișoara, *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timișoara), *Godea I.* (Polit, Timișoara), *Orozescu Liviu* (Polit., Timișoara), *Ieșan Alexandru* (Lic, Matei Basarab, București), *Lupescu Corneliu* (Lt. Roman). *Maliță Mircea* (Lic. Beiuș), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Munteanu Lucian* (Polit., Timișoara), *Muțiu Antim* (Polit., Timișoara), *Pat Moise* (Polit., Timișoara), *Pălăceanu Vasile* (Lic. Milit., Timișoara), *Pupezescu Ion*, *Rădoiu Nicolae* (Polit., Timișoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timișoara), *Șerengău Mihai* (Lic. Loga, Timișoara), *Șipoș Eugen* (Polit., Timișoara), *Stefănescu Marin* (Lt. Brăila), *Țincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraș), *Țigănoiu Al.* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2163. — *Să se găsească un cub de nouă cifre, astfel ca despărțindu-l în grupe de câte trei cifre, numărul format de grupul mijlociu să întreacă cu o unitate suma numerelor formate de celelalte două grupe.*

M. GHERMANESCU

Soluție. Fie N^3 cubul căutat, A, B, C grupele de câte trei cifre. După enunț, avem

$$B=A+C+1,$$

$$N^3=10^6A+10^3B+C=10^6A+10^3(A+C+1)+C$$
$$=(10^3+1)10^3A+(10^3+1)C+(10^3+1)-1,$$

deci

(1) $(N+1)(N^2-N+1)=1001(10^3A+C+1)$.

Cum $1001=7.11.13$, trebue ca primul membru să se dividă prin 7, 11 și 13.

Cercetând formele posibile ale lui N față de divizorii 7, 11 și 13, găsim

$$N=7m-1,\ 7m-2,\ 7m-3,$$

$$N=11n-1,$$

$$N=13p-1,\ 13p-3,\ 13p+4,$$

deci numai factorul $N+1$ poate fi divizibil prin 11. El nu poate fi divizibil prin 1001 căci are numai

trei cifre. Rezultă că el poate fi încă divizibil prin 7 sau prin 13, urmând ca celalt factor N^2-N+1 să fie divizibil prin 13 sau prin 7. Găsim astfel următoarele trei cazuri posibile:

1°. $N+1=\text{Mult. } 11.7$, $N^2-N+1=\text{Mult. } 13$;

2°. $N+1=\text{Mult. } 11.13$, $N^2-N+1=\text{Mult. } 7$.

3°. $N+1=\text{Mult. } 11$, $N^2-N+1=\text{Mult. } 7.13$.

Să le examinăm pe rând.

1°. Avem

$$N=7m-1=11n-1=13p+\alpha, \quad \alpha=-3 \text{ sau } 4,$$

din care deducem $m=11m_1$, $n=7n_1$, apoi

$$N=77m_1-1=13p+\alpha,$$

$$p=6m_1-\frac{m_1+\alpha+1}{13}, \quad m_1=13r-\alpha-1,$$

deci

$$N=1001r-77(\alpha+1)-1,$$

adică

$$N=1001r+153, \quad N=1001r-386,$$

r fiind un întreg arbitrar.

Cum $465<N<999$, prima formulă nu dă valori acceptabile pentru N, pe când a doua dă, pentru $r=1$, $N=615$, care este o soluție a problemei, căci

$$615^3=232.608.375, \quad 608=232+375+1.$$

2°. Avem

$$N=11n-1=13p-1=7m+\beta, \quad \beta=-2 \text{ sau } 3,$$

din care deducem $n=13n_1$, $p=11p_1$, apoi

$$N=143n_1-1=7m+\beta.$$

Găsim, ca mai sus

$$N=1001r+285, \quad N=1001r-144,$$

iar a doua dă, pentru $r=1$, $N=857$, care nu este soluție.

3° Avem

$$N=7m+\beta=11n-1=13p+\alpha,$$

unde $\alpha=-3$ sau 4, $\beta=-2$ sau 3. Procedând ca mai sus, găsim următoarele forme posibile pentru N

$$N=1001r-562, \quad N=1001r-100,$$
$$N=1001r+10, \quad N=1001r-529,$$

dintre care, numai ultima formulă dă soluția N=472, căci avem

$$472^3=105.154,048, \quad 154=105+048+1.$$

Problema admite deci soluțiile 154^3 și 615^3.

Notă. Doi corespondenți au găsit soluția 615^3, iar unul, soluția 472^3.

Iată fragmente din raționalmente respective:

„Ca să găsim ... încercăm să ridicăm la cub toate numerele dela 405 la 999“!!

Altul

„După mai multe încercări, am găsit un cub, etc“.

Nu știm cum să explicăm lipsa de seriozitate a unora din corespondenții noștrii. Nu trebue să se uite că, aci, la această *Revistă*, noi urmărim formarea spiritului matematic al corespondenților, în vederea unor buni viitori ingineri, profesori, oameni de știință, de aceia nu putem incuraja superficialitatea și lipsa de seriozitate.

Altă dată vom da numele corespondenților neserioși.

M. G.

Problema 2173. — *Sistemul*

$$\begin{cases} 2(X+Y+Z)=3(U+V), \\ YZ+ZX+XY=3UV, \end{cases}$$

în afară de soluția evidentă $X=Y=Z=U=V=1$, *are și alte soluții în numere întregi?*

D. POMPEIU

Soluția 1-a. I. Evident că, din cauza omogeneității, sistemul admite soluția banală

$$X=Y=Z=U=V=n=\text{întreg arbitrar.}$$

Să căutăm alte soluții. Având suma și produsul numerelor U și V, acestea vor fi rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea, care sunt raționale dacă

$$\frac{4}{9}(X+Y+Z)^2-\frac{4}{3}(XY+YZ+ZX)=W^2,$$

unde W este un întreg, $W=U-V$. Condiția de mai sus se poate încă scrie

$$(2X-Y-Z)^2+3(Y-Z)^2=(2Y-Z-X)^2+3(Z-X)^2$$
$$=(2Z-X-Y)^2+3(X-Y)^2=9W^2,$$

astfel că punând

$$2X-Y-Z=x, \quad Y-Z=y,$$

trebue să rezolvim în întregi ecuația

$$x^2+3y^2=9W^2,$$

care cere $x=3\alpha$, $y=3\beta$, deci

$$\alpha^2+3\beta^2=W^2.$$

După o teoremă a lui *Lagrange* (Oeuvres, I, 3, p. 708) divizorii impari ai numerelor de forma A^2+3B^2 sunt de aceiaș formă. Ori e ușor de văzut că α și β sunt de aceiaș paritate, căci suma

lor este pară, conform egalității

$$x+y=3(\alpha+\beta)=2(X-Z).$$

Dacă sunt pare, vom pune $\alpha=2^m\alpha_1$, $\beta=2^m\beta_1$, $W=2^mW_1$ și vom avea

$$\alpha_1^2+3\beta_1^2=W^2,$$

unde α_1 și β_1 sunt impare. Rezultă $W_1=2w$, unde w este impar,

$$\alpha_1^2+3\beta_1^2=4w^2.$$

Punând $w=\gamma^2+3\delta^2$, unde γ și δ sunt arbitrare, avem

$$(\gamma^2+3\delta^2)^2=(\gamma^2-3\delta^2)+3(2\gamma\delta)^2,$$

$$4(\gamma^2+3\delta^2)^2=(1^2+3.1^2)[(\gamma^2-3\delta^2)^2+3(2\gamma\delta)^2]$$

$$=(\gamma^2-3\delta^2\pm6\gamma\delta)^2+3(\gamma^2-3\delta^2\mp2\gamma\delta)^2,$$

deci

$$2X-Y-Z=3.2^m\varepsilon(\gamma^2-3\delta^2\pm6\gamma\delta),\quad \varepsilon=\pm1$$

$$Y-Z=3.2^m\varepsilon'(\gamma^2-3\delta^2\mp2\gamma\delta),\quad \varepsilon'=\pm1,$$

din care deducem

$$\begin{cases} Y=X-3.2^{m-1}[\varepsilon(\gamma^2-3\delta^2\pm6\gamma\delta)-\varepsilon'(\gamma^2-3\delta^2\mp2\gamma\delta)],\\ Z=X-3.2^{m-1}[\varepsilon(\gamma^2-3\delta^2\pm6\gamma\delta)+\varepsilon'(\gamma^2-3\delta^2\mp2\gamma\delta)],\\ U=X-2^m[\varepsilon(\gamma^2-3\delta^2\pm6\gamma\delta)-(\gamma^2+3\delta^2)],\\ V=X-2^m[\varepsilon(\gamma^2-3\delta^2\pm6\gamma\delta)+(\gamma^2+3\delta^2)], \end{cases}$$

în care m, γ, δ, X sunt întregi arbitrari.

Formulele de mai sus reprezintă soluția generală a sistemului propus, în afară de un factor sau un divizor comun.

Soluția 2-a. Forma soluției sugerează artificiul următor pentru rezolvarea sistemului: Să punem

$$Y=y+X,\quad Z=z+X,\quad U=u+X,\quad V=v+X;$$

sistemul se reduce la

$$2(y+z)=3(u+v),\quad yz=3uv,$$

care conduce la condiția

$$(y+z)^2+3(y-z)^2=4w^2,\ \text{etc.}$$

Notă. Patru corespondenți au dat soluția banală, semnalată la început. M. G.

Problema 2186. — *In ce bază este făcută împărțirea*

$$234520:545=242,\ \textit{rest}\ 22?$$

I. V. MATIES

Soluție. Fie B baza sistemului de numerație cerut.

Împărțirea din enunț poate fi scrisă acum sub forma:

$$2B^5+3B^4+4B^3+5B^2+2B=$$

$$(5B^2+4B+5)(2B^2+4B+2)+2B+2.$$

Făcând calculele și ordonând, obținem

$$(1)\quad 2B^5-7B^4-24B^3-31B^2-28B-12=0$$

Cum primul membru se anulează pentru $B=-1$ și $B=6$, rezultă că el se divide prin

$$(2)\qquad (B+1)(B-6)(=B^2-5B-6.$$

Efectuând împărțirea între primul membru din (1) și expresia (2), găsim că ecuația (1) se poate scri

$$(B^2-5B+6)(2B^3+3B^2+3B+2)=0,$$

sau

$$(3)\quad (B+1)(B-6)(B+1)(2B^2+B+2)=0,$$

fiind că factorul $2B^3+3B^2+3B+2$ se divide prin $B+1$.

Cum ultimul factor din (3) are rădăcini imaginare, se observă că singura valoare acceptabilă pentru B, compatibilă cu enunțul, este $B=6$.

Deci împărțirea este făcută în baza 6.

Soluții date de d-nii: *Cârnațiu Ion* (Lic. Blaj), *Cherdivarencu I.* (Polit., Timișoara), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Cotariu Marcel* (Brăila). *Pop Emil* (Pol., Timișoara). *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timișoara), *Rogoz Ioan* (Lic. Milit., Timișoara), *Vrânceanu G.* (Lic. Milit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2190. — *Trei frați moștenesc avere: primul ia* $\frac{3}{10}$ *din ea, al doilea ia* $\frac{4}{7}$ *din rest mai puțin 20.000 lei, iar al treilea restul.*

Dând toată moștenirea cu dobândă simplă, aceasta devine 1,002.000 lei după un an și 5 luni. Dacă ar fi fost dată pe timp de 2 ani, ar fi devenit 1,044.000.

Care a fost moștenirea, părțile fiecăruia și cu ce procent s'a făcut plasamentul?

M GHERMANESCU

Soluție. Diferența de 42.000 lei dintre ale două sume de mai sus reprezintă dobânda pe diferența de

timp, adică pe 7 luni; rezultă că dobânda pe o lună a fost de 6000 lei, deci pe un an şi 5 luni a fost de 102.000 lei, astfel că moştenirea a fost de lei

$$1{,}002.000 - 102.000 = 900.000.$$

Primul copil ia $\frac{3}{10} \times 900.000 = 270.000$ lei; al doilea ia $\frac{4}{7} \times 630.000 - 20.000 = 340.000$ lei, iar al treilea ia 290.000 lei.

Procentul a fost 8% pe an.

Au rezolvat problema d-nii: *Const. Chiriac, Constantinescu Ilie, I. Filimon, Al. Ieşan, M. Mazilu Emil Pop, Ion V. Rogoz, Teodor V. Rogoz, M. Sabău, C. Simcso, M Tabacu, Al. Ţigănoiu, M. Tulvan* şi *G Vrânceanu.*

M. G.

PROBLEME PROPUSE

2265. — Să se afle patratul de patru cifre, care reproduce la dreapta rădăcina sa patrată.

LUCIAN MUNTEANU

2266. — Să se găsească trei numere întregi pozitive în progresie armonică, ştiind că suma lor este 47.

ILIE CONSTANTINESCU

2267. — Să se determine λ şi μ şi să resolve ecuaţia cu rădăcini întregi

$$x^3 + \lambda x^2 + \mu = 0,$$

ştiind că între rădăcinele ei avem relaţia

$$x_1^4 + x_4^2 + x_3^4 = 1393.$$

EUGEN WEGENER

2268. — Să se rezolve, în numere întregi, sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 1 = uy \\ y^2 - 1 = vx \end{cases}.$$

M. GHERMANESCU

2269 — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 (y - z) = \alpha^2 \\ \sin^2 y - \sin^2 (z - x) = \beta^2 \\ \sin^2 z - \sin^2 (x - y) = \gamma^2 \end{cases}$$

BARBU POPESCU

2270. — Să se construiască un triunghiu cunoscându-i un vârf, cercul celor nouă puncte şi distanţa între piciorul unei mediane şi al unei înălţimi.

G-L GH. BUICLIU

2271. — Fie A, B, C, D şi E cinci puncte, primele două situate pe semiaxa Oy, dintr'un sistem de axe rectangulare, următoarele două pe semiaxa Ox, ştiind că $OA = OC = a$, $OB = b$, $\sphericalangle OAD = \theta$ şi în fine E pe Oy, astfel ca $OE = BD$.

Ducem dreapta CE şi o paralelă la ea prin B. Această paralelă taie semiaxa Ox în F. Perpendiculara din O pe AD intersectează perpendiculara din F pe Ox în punctul P.

Să se găsească locul geometric al punctului P, unghiul θ fiind variabil.

EUGEN I. SIPOS

2272. — Pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghic, în care $AB = AC = 1$, luăm punctele D şi E astfel ca

$$\sphericalangle BAE = 3 \sphericalangle BAD.$$

Dacă se notează $BD = x$, $BE = y$, se cere să se stabilească relaţia

$$\frac{y}{x} = \frac{3 - 3\sqrt{2}\, x + x^2}{1 - 3x^2 + \sqrt{2}\, x^3}$$

V. ALACI

Observări. 1°. Autorul notei No. 21 este d-l *Ţigănoiu Alexandru,* Politehnica Timişoara.

2°. Din problema 1946 publicată în Nr. 7, pag. 80, trebuesc suprimate numerile $30^3 = 27000$ şi $40^3 = 64000$, ele fiind trecute din eroare.

3°. In problema 2232, factorul $1 - \sin B$, din numitor, se va înlocui prin $1 + \cos B$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Barbu Ioan (P; 2209, 2211, 2213, 2217, 2220, 2224, 2227, 2231, 2233, 2234, 2236, 2237, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2251, 2256, 2257, 2263, 2264); *Braşoveanu Gheorghe* (P); *Constantinescu Ilie* (P. 2139, 2144, 2157, 2166, 2193, 2203, 2207, 2225, 2227, 2237, 2249, 2250, 2252, 2253, 2256, 2 57, 2263); *Mahrenholz Johannes* (N; 2227, 2230, 2232, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248); *Mozilin Maurius* 2225, 2230, 2231, 2233, 2234, 2237, 2241, 2246, 2249, 2256, 2257); *Munteanu Lucian* (P. 2135, 2183, 2207, 2123); *Stan A. C-tin* (P.); *Stanciu Petre* (1758, 1808, 1814, 1854, 1879, 1998, 1917, 1919, 1922, 1938, 1973, 1975, 1979, 2086, 2247, 2264); *Stoinescu Alexandru* (P); *Tincu C-tin* (P; 2121, 2169, 2257, 2361, 2263, 2264).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi insoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXIV. NOEMVRIE 1944 No. 9.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **IOAN V. MATIES:** CUBURI ISOFINALE (URMARE).
2. NOTE MATEMATICE 24, 25.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE 649, 2125, 2139, 2207.
5. PROBLEME PROPUSE: 2273–2280.
6. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 9. TIMISOARA, NOEMVRIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

CUBURI ISOFINALE

DE

IOAN V. MĂTIEȘ.

(Urmare)

d) $\overline{szu}$ *e cu soț nedivizibil cu* 10.

Vom trata un caz numeric, celelalte lucrându-se la fel:

Să se afle numerele, având cubul terminat cu $\overline{\pm m008}$.

Din tabloul 3, găsim în acest caz:

$$N = 250n \pm 2 \quad \text{sau} \quad N_1 = 500n_1 \pm 2$$

și

$$N_2 = 500n_2 \mp 248.$$

Le ridicăm la cub și punem condiția ca să se termine cu $\pm\overline{m008}$ avem succesiv:

$$N_1^3 = \pm 8 + 6000n_1 + M \cdot 10^4$$

și

$$N_2^3 = \mp 2992 + 6000u_2 + M \cdot 10^4$$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $6n_1 = \pm m + M \cdot 10$ și $6n_2 = \pm(m+3) + M \cdot 10$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $3n_1 = \pm\dfrac{m}{2} + M \cdot 5$ și $3n_2 = \pm\dfrac{m+3}{2} + M \cdot 5$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $n_1 = \mp\dfrac{3m}{2} + M \cdot 5$ și $n_2 = \mp\dfrac{3m-1}{2} + M \cdot 5$

unde în primul caz m trebue să fie *par*, iar în al doilea caz *impar*. Găsim pentru N în ambele cazuri:

$N(m) = \text{Mult } 2500 \mp (750m - 2)$, N^3 terminat cu $\pm\overline{m003}$.

Intrucât s'a obținut în ambele cazuri aceeași expresie pentru $N(m)$, restricțiile referitoare la m se pot omite, căci cele excluse de un caz, le primește celalalt caz.

Pentru găsirea tuturor formelor generale $N(m)$ au fost necesare a se face 253 de calcule analoage cu cele specificate la *a*), *b*), *c*) și *d*). Aceste rezultate le dăm în următorul tablou:

TABLOUL 4

$N(m)$ este rădăcina cuburilor isofinale de ordinul patru.

	N	N^3/szu	$N(m)$	$N^3/\overline{mszu}$	m
1	$10n$	000	$100n + 10a$; $(a = 1, \ldots, 9)$	$\overline{m000}$	$m = a^3$
2	$1000n \pm 1$	± 001	$10^4 . n \mp (3000m - 1)$	$\pm\overline{m001}$	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
3	$1000n \mp 413$	3	$10^4 . n \pm (3000m + 4587)$	3	„
4	$1000n \mp 457$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 1543)$	7	„
5	$250n \pm 2$	8	$2500 . n \mp (750m - 2)$	8	„
6	$1000n \mp 431$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 569)$	9	„
7	$1000n \mp 229$	± 011	$10^4 . n \mp (3000m - 2771)$	$\pm\overline{m011}$	„
8	$1000n \pm 317$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 4683)$	3	„

	N	N^3/szu	N(m)	$N^3/\overline{mszu}$	m
9	$250n \pm 106$	6	$2500 . n \pm (750m - 644)$	6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
10	$1000n \pm 73$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 3073)$	7	„
11	$1000n \mp 61$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 1061)$	9	„
12	$1000n \mp 259$	± 021	$10^4 . n \mp (3000m + 2259)$	$\pm\overline{m021}$	„
13	$1000n \mp 353$	3	$10^4 . n \pm (3000m + 647)$	3	„
14	$250n \mp 76$	4	$2500 . n \pm (750m - 826)$	4	„
15	$1000n \pm 3$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 3)$	7	„
16	$1000n \pm 109$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 4891)$	9	„
17	$1000n \mp 89$	± 031	$10^4 . n \mp (3000m - 4911)$	$\pm\overline{m031}$	„
18	$250n \pm 118$	2	$2500 . n \mp (750m + 132)$	2	„
19	$1000n \mp 423$	3	$10^4 . n \pm (3000m + 577)$	3	„
20	$1000n \pm 333$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 2333)$	7	„
21	$1000n \pm 79$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 921)$	9	„
22	$1000n \pm 281$	± 041	$10_4 . n \mp (3000m - 4281)$	$\pm\overline{m041}$	„
23	$1000n \pm 107$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 4893)$	3	„
24	$1000n \pm 63$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 63)$	7	„
25	$250n \mp 28$	8	$2500 . n \mp (750m - 972)$	8	„
26	$1000n \mp 151$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 849)$	9	„
27	$1000n \mp 149$	± 051	$10^4 . n \mp (3000m + 4149)$	$\pm\overline{m051}$	„
28	$1000n \pm 237$	3	$10^4 . n + (3000m + 4237)$	3	„
29	$250n \pm 86$	6	$2500 . n \pm (750m + 586)$	6	„
30	$1000n \pm 193$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 3193)$	7	„
31	$1000n \pm 419$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 419)$	9	„
32	$1000n \mp 379$	± 061	$10^4 . n \mp (3000m + 379)$	$\pm\overline{m061}$	„
33	$1000n \mp 33$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 2033)$	3	„
34	$250n \pm 4$	4	$2500 . n \pm (750m + 4)$	4	„
35	$1000n \mp 277$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 1723)$	7	„
36	$1000n \mp 211$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 2211)$	9	„
37	$1000n \mp 409$	± 071	$10^4 . n \mp (3000m + 4409)$	$\pm\overline{m071}$	„
38	$250n \mp 112$	2	$2500 . n \mp (750m - 1138)$	2	„
39	$1000n \pm 297$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 3703)$	3	„
40	$1000n \mp 347$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 4347)$	7	„
41	$1000n \mp 41$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 2959)$	9	„
42	$1000n \mp 239$	± 081	$10^4 . n \mp (3000m - 3761)$	$\pm\overline{m081}$	„
43	$1000n \pm 227$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 773)$	3	„
44	$1000n \mp 17$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 4983)$	7	„
45	$250n \pm 42$	8	$2500 . n \mp (750m - 542)$	8	„
46	$1000n \mp 71$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 4071)$	9	„
47	$1000n \pm 131$	± 091	$10^4 . n \mp (3000m - 4131)$	$\pm\overline{m091}$	„
48	$1000n \mp 243$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 3243)$	3	„
49	$250n \pm 16$	6	$2500 . n \pm (750m - 484)$	6	„
50	$1000n \mp 287$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 287)$	7	„

	N	N^3/szu	N(m)	$N^3/\overline{mszu}$	m
51	$1000n \mp 301$	9	$10^4.n \mp (3000m + 3301)$	9	$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
52	$1000n \mp 299$	± 101	$10^4.n \mp (3000m + 3299)$	$\pm\overline{m101}$	„
53	$1000n \mp 113$	3	$10^4.n \pm (3000m - 1113)$	3	„
54	$250n \mp 116$	4	$2500.n \pm (750m + 634)$	4	„
55	$1000n \mp 157$	7	$10^4.n \pm (3000m - 157)$	7	„
56	$1000n \pm 269$	9	$10^4.n \mp (3000m + 473)$	9	„
57	$1000n \pm 471$	± 111	$10^4.n \mp (3000m - 1471)$	$\pm\overline{m111}$	„
58	$250n \pm 58$	2	$2500.n \mp (750m + 1192)$	2	„
59	$1000n \mp 383$	3	$10^4.n \pm (3000m - 4383)$	3	„
60	$1000n \pm 373$	7	$10^4.n \pm (3000m - 4627)$	7	„
61	$1000n \mp 361$	9	$10^4.n \mp (3000m - 1639)$	9	„
62	$1000n \pm 441$	± 121	$10^4.n \mp (3000m + 1559)$	$\pm\overline{m121}$	„
63	$1000n \mp 53$	3	$10^4.n \pm (3000m - 3053)$	3	„
64	$40n \pm 5$	5	$400.n \pm (40.m + 5)$	$\pm\overline{m125}$	$m = 0, 1, 3, 5, 6, 8$
			$400.n \pm (40.m + 85)$	$\pm\overline{m125}$	$m = 2$ şi 7
			$400.n \pm (40.m - 75)$	$\pm\overline{m125}$	$m = 4$ şi 9
65	$1000n \pm 303$	7	$10^4.n \pm (3000m - 3697)$	7	$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
66	$250n \mp 38$	8	$2500.n \mp (750m - 1212)$	8	„
67	$1000n \mp 191$	9	$10^4.n \mp (3000m + 4191)$	9	„
68	$1000n \mp 389$	± 131	$10^4.n \mp (3000m + 2389)$	$\pm\overline{m131}$	„
69	$1000n \mp 123$	3	$10^4.n \pm (3000m + 2877)$	3	„
70	$250n \mp 104$	6	$2500.n \pm (750m + 1146)$	6	„
71	$1000n \mp 367$	7	$10^4.n \pm (3000m + 2633)$	7	„
72	$1000n \mp 221$	9	$10^4.n \mp (3000m + 2221)$	9	„
73	$1000n \mp 19$	± 141	$10^4.n \mp (3000m + 1019)$	$\pm\overline{m141}$	„
74	$1000n \pm 407$	3	$10^4.n \pm (3000m + 3407)$	3	„
75	$250n \pm 67$	4	$2500.n \pm (750m + 1064)$	4	„
76	$1000n \pm 363$	7	$10^4.n \mp (3000m + 4363)$	7	„
77	$1000n \mp 451$	9	$10^4.n \pm (3000m + 2451)$	9	„
78	$1000n \mp 449$	± 151	$10^4.n \pm (3000m - 2551)$	$\pm\overline{m151}$	„
79	$250n \mp 122$	2	$2500.n \pm (750m - 378)$	2	„
80	$1000n \mp 463$	3	$10^4.n \pm (3000m - 1463)$	3	„
81	$1000n \pm 493$	7	$10^4.n \pm (3000m + 1493)$	7	„
82	$1000n \pm 119$	9	$10^4.n \mp (3000m + 4881)$	9	„
83	$1000n \pm 321$	± 161	$10^4.n \mp (3000m + 1679)$	$\pm\overline{m161}$	„
84	$1000n \pm 267$	3	$10^4.n \pm (3000m - 1733)$	3	„
85	$1000n \pm 23$	7	$10^4.n \pm (3000m + 4023)$	7	„
86	$250n \mp 18$	8	$2500.n \mp (750m - 482)$	8	„
87	$1000n \pm 489$	9	$10^4.n \mp (3000m - 489)$	9	„
88	$1000n \pm 291$	± 171	$10^4.n \mp (3000m + 3709)$	$\pm\overline{m171}$	„
89	$1000n \mp 403$	3	$10^4.n \pm (3000m + 2597)$	3	„
90	$250n \mp 24$	6	$2500.n \pm (750m + 476)$	6	„

	N	$N^3/s\,z\,u$	N(m)	$N^3/\overline{m\,s\,z\,u}$	m
91	$1000\,n \mp 47$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 1953)$	7	$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
92	$1000\,n \mp 341$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 3659)$	9	„
93	$1000\,n \pm 461$	± 181	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 3539)$	$\pm \overline{m}\,\overline{181}$	„
94	$1000\,n \mp 473$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 1527)$	3	„
95	$250\,n \pm 44$	4	$2500\,.\,n \pm (750\,m - 1206)$	4	„
96	$1000\,n \pm 283$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 4717)$	7	„
97	$1000\,n \mp 371$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 4629)$	9	„
98	$1000\,n \mp 169$	± 191	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 1169)$	$\pm \overline{m}\,\overline{191}$	„
99	$250\,n \pm 98$	2	$2500\,.\,n \mp (750\,m - 848)$	2	„
100	$1000\,n \pm 57$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 4943)$	3	„
101	$1000\,n \pm 13$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 4013)$	7	„
102	$1000\,n \pm 399$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 3399)$	9	„
103	$1000\,n \pm 401$	± 201	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 3401)$	$\pm \overline{m}\,\overline{201}$	„
104	$1000\,n \pm 187$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 3187)$	3	„
105	$1000\,n \pm 143$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 1854)$	7	„
106	$250\,n \pm 102$	8	$2500\,.\,n \mp (750\,m - 852)$	8	„
107	$1000\,n \mp 31$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 31)$	9	„
108	$1000\,n \pm 171$	± 211	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 171)$	$\pm \overline{m}\,\overline{211}$	„
109	$1000\,n \mp 83$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 4083)$	3	„
110	$250\,n \pm 6$	6	$2500\,.\,n \pm (750\,m + 6)$	6	„
111	$1000\,u \mp 327$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 2327)$	7	„
112	$1000\,n \pm 339$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 4339)$	9	„
113	$1000\,n \pm 141$	± 221	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 859)$	$\pm \overline{m}\,\overline{221}$	„
114	$1000\,n \pm 247$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 3247)$	3	„
115	$250\,n \pm 74$	4	$2500\,.\,n \pm (750\,m - 1176)$	4	„
116	$1000\,n \mp 397$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 2603)$	7	„
117	$1000\,n \mp 491$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 3491)$	9	„
118	$1000\,n \pm 311$	± 231	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 311)$	$\pm \overline{m}\,\overline{231}$	„
119	$250\,n \mp 32$	2	$2500\,.\,n \mp (750\,m - 218)$	2	„
120	$1000\,n \pm 177$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 4823)$	3	„
121	$1000\,n \mp 67$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 2933)$	7	„
122	$1000\,n \pm 479$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 3521)$	9	„
123	$1000\,n \mp 319$	± 241	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 3681)$	$\pm \overline{m}\,\overline{241}$	„
124	$1000\,n \mp 293$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 1707)$	3	„
125	$1000\,n \mp 337$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 1337)$	7	„
126	$250\,n \pm 72$	8	$2500\,.\,n \mp (750\,m + 178)$	8	„
127	$1000\,n \pm 249$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m - 4249)$	9	„
128	$1000\,n \pm 251$	± 251	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 749)$	$\pm \overline{m}\,\overline{251}$	„
129	$1000\,n \mp 163$	3	$10^4.\,n \pm (3000\,m + 2837)$	3	„
130	$250\,n \mp 14$	6	$2500\,.\,n \pm (750\,m - 264)$	6	„
131	$1000\,n \mp 207$	7	$10^4.\,n \pm (3000\,m - 207)$	7	„
132	$1000\,n \mp 181$	9	$10^4.\,n \mp (3000\,m + 181)$	9	„

	N	N^3 / s z u	N (m)	N^3 / m s z u	m
133	$1000n \pm 21$	± 261	$10^4 . n \mp (3000m + 2979)$	$\pm \overline{m261}$	$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
134	$1000n \mp 433$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 1433)$	3	„
135	$250n \mp 96$	4	$2500 . n \pm (750m + 1154)$	4	„
136	$1000n \pm 323$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 3677)$	7	„
137	$1000n \pm 189$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 3189)$	9	„
138	$1000n \mp 9$	± 271	$10^4 . n \mp (3000m + 3009)$	$\pm \overline{m271}$	„
139	$250n \mp 12$	2	$2500 . n \pm (760m - 988)$	2	„
140	$1000n \mp 103$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 1103)$	3	„
141	$1000n \pm 253$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 1747)$	7	„
142	$1000n \pm 359$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 4359)$	9	„
143	$1000n \pm 161$	± 281	$10^4 . n \mp (3000m + 839)$	$\pm \overline{m281}$	„
144	$1000n \mp 173$	3	$10^4 . n \pm (3000m + 3827)$	3	„
145	$1000n \mp 417$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 4417)$	7	„
146	$250n \mp 108$	8	$2500 . n \mp (750m + 108)$	8	„
147	$1000n \pm 329$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 3329)$	9	„
148	$1000n \mp 469$	± 291	$10^4 . n \mp (3000m - 3531)$	$\pm \overline{m291}$	„
149	$1000n \pm 357$	3	$10^4 . n \pm (3000m + 3357)$	3	„
150	$250n \mp 84$	6	$2500 . n \pm (750m - 334)$	6	„
151	$1000n \pm 313$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 1687)$	7	„
152	$1000n \pm 99$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 99)$	9	„
153	$1000n \pm 101$	± 301	$10^4 . n \mp (3000m - 101)$	$\pm \overline{m301}$	„
154	$1000n \pm 487$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 2513)$	3	„
155	$250n \pm 34$	4	$2500 . n \pm (750m + 784)$	4	„
156	$1000n \pm 443$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 3557)$	7	„
157	$1000n \mp 331$	9	$10^4 . n \mp (3000m - 4659)$	9	„
158	$1000n \pm 129$	± 311	$10^4 . n \mp (3000m + 1129)$	$\pm \overline{m311}$	„
159	$250n \mp 92$	2	$2500 . n \mp (750m - 658)$	2	„
160	$1000n \pm 217$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 3783)$	3	„
161	$1000n \mp 27$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 27)$	7	„
162	$1000n \pm 39$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 2961)$	9	„
163	$1000n \mp 159$	± 321	$10^4 . n \mp (3000m + 169)$	$\pm \overline{m321}$	„
164	$1000n \mp 453$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 453)$	3	„
165	$1000n \mp 97$	7	$10^4 . n \pm (3000m - 1097)$	7	„
166	$250n \pm 62$	8	$2500 . n \mp (750m - 1062)$	8	„
167	$1000n \pm 209$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 2791)$	9	„
168	$1000n \pm 11$	± 331	$10^4 . n \mp (3000m - 3011)$	$\pm \overline{m331}$	„
169	$1000n \pm 477$	3	$10^4 . n \pm (3000m - 2523)$	3	„
170	$250n \pm 46$	6	$2500 . n \pm (750m - 204)$	6	„
171	$1000n \pm 233$	7	$10^4 . n \pm (3000m + 3233)$	7	„
172	$1000n \pm 179$	9	$10^4 . n \mp (3000m + 4821)$	9	„
172	$1000n \pm 381$	± 341	$10^4 . n \mp (3000m + 1619)$	$\pm \overline{m341}$	„
174	$1000n \pm 7$	3	$19^4 . n \pm (3000m + 7)$	3	„

	N	N^3/szu	N (m)	$N^3/\overline{mszu}$	m
175	$250 . n \mp 36$	4	$2500 . n \pm (750 m + 214)$	4	$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
176	$1000 . n \mp 37$	7	$10^4 . n \pm (3000 m + 2963)$	7	„
177	$1000 . n \mp 51$	9	$10^4 . n \mp (3000 m - 949)$	9	„
178	$1000 . n \mp 49$	± 351	$10^4 . n \mp (3000 m + 4049)$	$\pm \overline{m351}$	„
179	$250 . n \mp 22$	2	$2500 . n \mp (750 m + 772)$	2	„
180	$1000 . n \pm 137$	3	$10^4 . n \pm (3000 m - 2863)$	3	„
181	$1000 . n \pm 93$	7	$10^4 . n \pm (3000 m - 1907)$	7	„
182	$1000 . n \mp 481$	9	$10^4 . n \mp (3000 m - 4519)$	9	„
183	$1000 . n \mp 279$	± 361	$10^4 . n \mp (3000 m + 4279)$	$\pm \overline{m361}$	„
184	$1000 . n \mp 133$	3	$10^4 . n \pm (3000 m - 1133)$	3	„
185	$1000 . n \mp 377$	7	$10^4 . n \pm (3000 m - 1377)$	7	„
186	$250 . n \pm 82$	8	$2500 . n \mp (750 m - 832)$	8	„
187	$1000 . n \mp 111$	9	$10^4 . n \mp (3000 m + 4111)$	9	„
188	$1000 . n \mp 309$	± 371	$10^4 . n \mp (3000 m + 2309)$	$\pm \overline{m371}$	„
189	$1000 . n \pm 197$	3	$10^4 . n \pm (3000 m - 4803)$	3	„
190	$40 n \pm 15$	5	$400 . n \pm (40 m + 135)$	$\pm \overline{m375}$	$m = 0, 5$
			$400 . n \pm (40 m - 185)$	$\pm \overline{m375}$	$m = 1, 2, 4, 6, 7, 9$
			$400 . n \pm (40 m - 105)$	$\pm \overline{m375}$	$m = 3, 8$
191	$250 . n \mp 124$	6	$2500 . n \pm (750 m + 126)$	6	$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
192	$1000 . n \mp 447$	7	$10^4 . n \pm (3000 m + 4553)$	7	„
193	$1000 . n \pm 59$	9	$10^4 . n \mp (3000 m + 4941)$	9	„
194	$1000 . n \mp 139$	± 381	$10^4 . n \mp (3000 m - 1861)$	$\pm \overline{m381}$	„
195	$1000 . n \pm 127$	3	$10^4 . n \pm (3000 m - 3873)$	3	„
196	$250 . n \mp 56$	4	$2500 . n \pm (750 m - 556)$	4	„
197	$1000 . n \mp 117$	7	$10^4 . n \pm (3000 m - 4117)$	7	„
198	$1000 . n \pm 29$	9	$10^4 . n \mp (3000 m - 2029)$	9	„
199	$1000 . n \pm 231$	± 391	$10^4 . n \mp (3000 m + 1769)$	$\pm \overline{m391}$	„
200	$250 . n \mp 52$	2	$2500 . n \mp (750 m + 802)$	2	„
201	$1000 . n \mp 343$	3	$10^4 . n \pm (3000 m + 1657)$	3	„
202	$1000 . n \mp 387$	7	$10^4 . n \pm (3000 m + 2613)$	7	„
203	$1000 . n \mp 201$	9	$10^4 . n \mp (3000 m + 3201)$	9	„
204	$1000 . n \mp 199$	± 401	$10^4 . n \mp (3000 m + 3199)$	$\pm \overline{m401}$	„
205	$1000 . n \mp 213$	3	$10^4 . n \pm (3000 m + 1787)$	3	„
206	$1000 . n \mp 257$	7	$10^4 . n \pm (3000 m + 4743)$	7	„
207	$250 . n \mp 48$	8	$2500 . n \mp (750 m + 798)$	8	„
208	$1000 . n \pm 369$	9	$10^4 . n \mp (3000 m + 631)$	9	„
209	$1000 . n \mp 429$	± 411	$10^4 . n \pm (3000 m + 2429)$	$\pm \overline{m411}$	„
210	$1000 . n \mp 483$	3	$10^4 . n \pm (3000 m - 3483)$	3	„
211	$250 . n \mp 94$	6	$2500 . n \pm (750 m + 656)$	6	„
212	$1000 . n \pm 273$	7	$10^4 . n \pm (3000 m + 2273)$	7	„
213	$1000 . n \mp 261$	9	$10^4 . n \mp (3000 m + 261)$	9	„
214	$1000 . n \mp 459$	± 421	$10^4 . n \mp (3000 m - 541)$	$\pm \overline{m421}$	„

	N	$N^3/s\,z\,u$	N (m)	$N^3/\overline{m\,s\,z\,u}$	m
215	$1000 \cdot n \mp 153$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 4153)$	3	$m = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
216	$250 \cdot n \mp 26$	4	$2500 \cdot n \pm (750\,m + 974)$	4	„
217	$1000 \cdot n \pm 203$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 4797)$	7	„
218	$1000 \cdot n \mp 91$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 2011)$	9	„
219	$1000 \cdot n \mp 289$	± 431	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 4289)$	$\pm\overline{m431}$	„
220	$250 \cdot n \pm 68$	2	$2500 \cdot n \mp (750\,m - 568)$	2	„
221	$1000 \cdot n \mp 223$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 223)$	3	„
222	$1000 \cdot n \mp 467$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m + 3533)$	7	„
223	$1000 \cdot n \mp 121$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 3879)$	9	„
224	$1000 \cdot n \pm 81$	± 441	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 3081)$	$\pm\overline{m441}$	„
225	$1000 \cdot n \pm 307$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 1693)$	3	„
226	$1000 \cdot n \pm 263$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 2737)$	7	„
227	$250 \cdot n \mp 78$	8	$2500 \cdot n \mp (750\,m - 1172)$	8	„
228	$1000 \cdot n \mp 351$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 2351)$	9	„
229	$1000 \cdot n \mp 349$	± 451	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 2651)$	$\pm\overline{m451}$	„
230	$1000 \cdot n \pm 437$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m + 1437)$	3	„
231	$250 \cdot n \mp 114$	6	$2500 \cdot n \pm (750\,m - 1114)$	6	„
232	$1000 \cdot n \pm 393$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 3607)$	7	„
233	$1000 \cdot n \pm 219$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 781)$	9	„
234	$1000 \cdot n \pm 421$	± 461	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 4421)$	$\pm\overline{m461}$	„
235	$1000 \cdot n \pm 167$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 823)$	3	„
236	$250 \cdot n \pm 54$	4	$2500^4 \cdot n \pm (750\,m - 196)$	4	„
237	$1000 \cdot n \mp 77$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m + 923)$	7	„
238	$1000 \cdot n \mp 411$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 1411)$	9	„
239	$1000 \cdot n \pm 391$	± 471	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 1609)$	$\pm\overline{m471}$	„
240	$250 \cdot n \pm 88$	2	$2500 \cdot n \mp (750\,m - 838)$	2	„
241	$1000 \cdot n \pm 497$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m + 1497)$	3	„
242	$1000 \cdot n \mp 147$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m + 853)$	7	„
243	$1000 \cdot n \mp 241$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m + 4241)$	9	„
244	$1000 \cdot n \mp 439$	± 481	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 4561)$	$\pm\overline{m481}$	„
245	$1000 \cdot n \pm 427$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 1573)$	3	„
246	$1000 \cdot n \pm 183$	7	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 3817)$	7	„
247	$250 \cdot n \mp 8$	8	$2500^4 \cdot n \mp (750\,m + 758)$	8	„
248	$1000 \cdot n \mp 271$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 729)$	9	„
249	$1000 \cdot n \mp 69$	± 491	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 2931)$	$\pm\overline{m491}$	„
250	$1000 \cdot n \mp 43$	3	$10^4 \cdot n \pm (3000\,m - 43)$	3	„
251	$250 \cdot n \pm 66$	6	$2500 \cdot n \pm (750\,m - 184)$	6	„
252	$1000 \cdot n \mp 87$	7	$10^4 \cdot n + (3000\,m - 3087)$	7	„
253	$1000 \cdot n \pm 499$	9	$10^4 \cdot n \mp (3000\,m - 3499)$	9	„

Acest tablou cuprinde formele generale ale lui N, având N^3 terminat cu $\pm\overline{szu}$, precum şi formele generale $N(m)$, având N^3 terminat cu $\overline{mszu}$. Cuburile numerelor $N(m)$ sunt *cuburi isofinale de ordinul patru.*

Se remarcă faptul că orice terminaţiune cubică de trei cifre, precedată de o cifră oarecare, este terminaţiune cubică de patru cifre[1].

Din această cauză în coloana (m) nu s'au trecut valori decât acolo unde la aceeaş terminaţiune sunt mai multe expresiuni pentru $N(m)$ ca $\pm\overline{m125}$ sau $\overline{m375}$.

5°. In mod analog se poate extinde problema şi pentru *„cuburile isofinale de ordinul 5, 6, . . . , luând ca bază de plecare rezultatele tabloului 4.*

III. Generalizări.

Cuburi isofinale în baza k de numărare sunt cuburile soluţiilor *congruenţei de gradul trei, ordinul p, în baza k,* de forma:

$$f(x) = x^3 - F_p = M \cdot k^p.$$

Soluţia generală a acestei congruenţe, precum se ştie [2] este

$$x = x_p + M \cdot k^p, \qquad x_p = \alpha_p \ldots \alpha_2 \cdot \alpha_1.$$

x_p fiind un număr scris în baza k, de p cifre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, unde α_1 reprezintă ansamblul soluţiilor de o cifră ale *congruenţei iniţiale*

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^3 - u = M\,k, \quad \alpha_1 < k,$$

iar $\alpha_i\,(i = 2, 3, \ldots, p)$ fiind soluţiile şirului de congruenţe dat de *congruenţa de recurenţă de gradul şi ordinul prim* de forma

$$\frac{f(x_{i-1})}{k^{i-k}} + f'(x_{i-1}) \cdot \alpha_i = M \cdot k,$$

unde $f'(x)$ fiind derivata funcţiunei $f(x) = x^3 - F_p$, în care se înlocueşte x prin x_{i-1}.

Observare. Soluţia generală se mai poate scrie, în cazul când k admite ca divizori, $k_1, k_2, k, \ldots, k_r$,

$$x = x_p + M \cdot k_1^{p_1} \cdot k_2^{p_2} \ldots k_r^{p_r},$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_r \leqq p$.

2°. **Puteri isofinale.** Analog *„patratelor isofinale"* şi *„cuburilor isofinale"* se pot defini şi afla *„puteri mai superioare isofinale"* ca: *„bipatrate isofinale", „patrate-cuburi isofinale", „bicuburi isofinale"*, etc. Toate acestea sunt cazuri particulare ale *„puterilor isofinale"*, ale căror rădăcini sunt soluţii date de *congruenţa de gradul n şi ordinul p,* de forma:

$$f(x) = x^n - F_p = M \cdot k^p$$

rezolvabilă în numere întregi pe aceeaş cale indicată la loc citat mai sus.

Exemplu de bicuburi isofinale:

$4^9 = 262144$ [3] şi $54^9 = 3.904.305.912.313.244$.

3°. **Puteri diferite isofinale.** Din congruenţele:

$$x^m = F_p + M \cdot k^p \quad \text{şi} \quad y^n = F_p + M \cdot k^p$$

prin eliminarea grupului (F_p) de p cifre, obţinem

$$f(x, y) = x^m - y^n = M \cdot k^p$$

o congruenţă de gradul m sau n respectiv pentru x sau y de ordinul p.

Soluţiile acestei congruenţe sunt [2]

$$x = x_p + M\,k^p \quad \text{şi} \quad y = y_p + M \cdot k^p,$$

unde x_p şi y_p sunt numere de p cifre în baza k

$$x_p = \alpha_p\,\alpha_{p-1} \ldots \alpha_2\,\alpha_1 \quad \text{şi} \quad y_p = \beta_p\,\beta_{p-1} \ldots \beta_2\,\beta_1.$$

Cifrele α_1 şi $\beta_1 < k$ sunt ansamblul valorilor ce verifică congruenţa iniţială de ordinul prim

$$f(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1^m - \beta_1^n = M \cdot k,$$

iar α_i şi β_i pentru $i = 2, 3, \ldots, p$ sunt soluţiile congruenţei de recurenţă

$$\frac{f(x_{i-1}, y_{i-1})}{k^{i-1}} + f'_{x_{i-1}} \cdot \alpha_i + f'_{y_{i-1}} \cdot \beta_i = M \cdot k,$$

unde f'_x şi f'_y reprezintă derivate parţiale ale funcţiei $f(x, y) = x^m y^m$, în care se înlocueşte x şi y respectiv cu x_{i-1} şi y_{i-1}.

Iată un exemplu de puteri diferite isofinale:

$$251^2 = 63001 \quad \text{şi} \quad 1001^3 = 1003003001.$$

---

[1]) Este obiectul problemei 3933 din „Gazeta Matematică".

[2]) *I. V. Mătieş:* Rezolvarea congruenţelor de gradul *n* şi ordinul *p*. R. M. T., vol. XXIV, No. 1, 1944.

[3]) Obiectul problemei 5242 din *G. M.*

[4]) *I. V. Mătieş.* Rezolvarea congruenţelor cu mai multe necunoscute din R. M. T., vol. XXIV, pag. 3.

NOTE MATEMATICE

24. — *Un sistem de ecuaţii cu numerele lui Legendre.*

Îmi propun să studiez soluţiile întregi şi pozitive ale sistemului

$$E\left(\frac{x}{y}\right)=a \quad \text{şi} \quad E\left(\frac{x}{y}\right)^n=b,$$

unde a, b, n sunt întregi şi pozitivi, iar $E(i)$ înseamnă întregii lui i.

Prima ecuaţie ne dă condiţia

$$(1) \qquad a-y \leqq x < (a+1).y.$$

A doua ecuaţie ne dă

$$(2) \qquad b^{\frac{1}{n}}.y \leqq x < (b+1)^{\frac{1}{n}}.y.$$

Atunci vom avea următoarele cazuri

$$(3) \qquad a < b^{\frac{1}{n}} \quad \text{şi} \quad a+1 > (b+1)^{\frac{1}{n}},$$

condiţia (2) este cea mai restrânsă.

$$(4) \qquad a > b^{\frac{1}{n}} \quad \text{şi} \quad a+1 < (b+1)^{\frac{1}{n}}.$$

Condiţia (3) este cea mai restrânsă.

$$(5) \qquad a < b^{\frac{1}{n}} \quad \text{şi} \quad a+1 < (b+1)^{\frac{1}{n}}.$$

sau

$$a > b^{\frac{1}{n}} \quad \text{şi} \quad a+1 > (b+1)^{\frac{1}{n}}.$$

În aceste cazuri ambele condiţiuni trebuesc analizate.

În mod analog se poate studia sistemul de ecuaţii

$$E\left(\alpha\frac{x}{y}\right)^m=a \quad \text{şi} \quad E\left(\beta\frac{x}{y}\right)^n=b.$$

COMANDOR I. LINTES

25. — *Asupra unui sistem diofantian.*

Sistemul diofantian

$$x^2+a\,x\,y=u^4, \qquad x^2+b\,x\,z=v^2$$

a făcut obiectul problemei 1788, propusă de d. *A. Gloden* şi rezolvată la pag. 70 a vol. XXIII. Nu rezultă în nici un chip gradul de generalitate al soluţiei date, obţinută pe o cale empirică, de altfel.

Iată soluţia generală. Să începem cu a doua ecuaţie, pe care o putem scrie

$$X^2+b\,X\,Z=1,$$

cu $x=\nu X$, $z=\nu Z$. Ecuaţia aceasta reprezintă o iperbolă ce trece prin punctul (1, 0). Tăind-o prin dreapta

$$Z=k(X-1)$$

ce trece prin acest punct, a doua intersecţie va avea coordonatele raţionale; vom obţine toate punctele de coordonate raţionale ale iperbolei dând lui k toate valorile raţionale posibile, $k=\frac{\alpha}{\beta}$.

Găsim

$$x=\lambda\beta^2, \quad z=\lambda(2\beta+b\alpha), \quad \nu=\lambda\beta(\beta+b\alpha)$$

unde λ este un întreg arbitrar sau o fracţie, având ca numitor eventualul divizor comun al numerilor cu care se înmulţeşte λ.

Prima ecuaţie a sistemului propus este de aceiaş formă ca a doua, în x, y, u^2, aşa că vom avea

$$x=\lambda\beta, \quad y=\lambda\gamma(2\beta+a\gamma), \quad u^2=\lambda\beta(\beta+a\gamma).$$

Vom distinge două cazuri, după cum x, y, z, u, ν sunt prime între ele, sau au un divizor comun în totalitatea lor.

In primul caz, trebue $\lambda=1$, deci

$$u^2=\beta(\beta+a\gamma),$$

ecuaţie de aceiaş formă cu cele date, satisfăcută deci de

$$\beta=\mu m^2, \quad \gamma=\mu(2am+an), \quad u=\mu m(m+an),$$

care conduc la

$$(A) \qquad \begin{aligned} &x=\mu^2 m^4,\\ &y=\mu^2(4m^3n+6am^2n^2+4a^2mn^3+a^3n^4),\\ &z=\alpha(2\mu m^2+b\alpha),\\ &u=\mu m(m+an), \quad \nu=\mu m^2(\mu m^3+b\alpha), \end{aligned}$$

din care se obţin formulele d-lui *A. Gloden* făcând $\mu=1$. Se vede aci că μ nu este un simplu factor de care ne putem dispensa din cauza omogeneităţii.

Dacă $\lambda\neq 1$, fie δ *c.m.m.d.c* al numerelor β şi $\beta+a\gamma$,

$$\beta=\beta_1\delta, \qquad a\gamma+\beta=\gamma_1\delta;$$

avem

$$u^2=\lambda\beta_1\gamma_1\delta^2$$

şi cum β_1, γ_1 sunt prime între ele, trebue ca $\lambda = \beta_1 \gamma_1 \mu^2$, deci

$$u = \mu \beta_1 \gamma_1 \delta = \mu \beta_1 (a\gamma + \beta_1 \delta),$$

aşa că

$$x = \mu^2 \beta^3 \delta (a\gamma + \beta_1 \delta), \quad y = \mu^2 \beta_1 \gamma_1 \gamma (a\gamma + 2\beta_1 \delta),$$

(B) $$u = \mu \beta_1 (a\gamma + \beta_1 \delta), \quad z = \mu^2 \beta_1 \gamma_1 \alpha (2\beta_1 \delta + b\alpha),$$

$$v = \mu^2 \beta_1^2 \gamma_1 \delta (\beta_1 \delta + b\alpha),$$

unde $a\gamma = (\gamma_1 - \beta_1)\delta$.

Soluţia generală a sistemului propus este dată deci de formulele (A) şi (B).

M. GHERMANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 2, Octomvrie 1944. † *Barbu Sergescu*, de *Cristea Mateescu*. Relaţii între indicatorii numerici, de *Ioan B. Florescu*. O problemă din geometria triunghiului, de *Şerban Gheorghiu*. Proprietăţi ale vârfurilor unui tetraedru în raport cu ariile feţelor care trec prin aceste vârfuri, de *N. Abramescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 649. — *Se dau punctele* A, B, C. *Să se găsească în planul lor un punct* D *astfel ca unghiul* ADB *să aibă o mărime dată, iar bisectoarea unghiului său adiacent suplimentar să treacă prin* C.

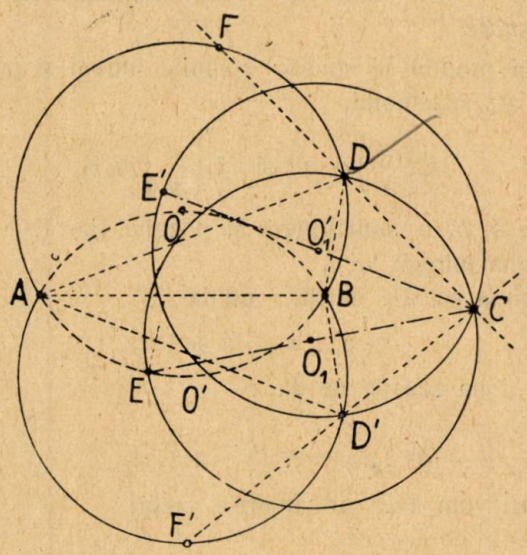
M. C. RADULESCU

Soluţia I. Presupunem problema rezolvată şi fie D punctul căutat, iar E şi F intersecţiile cercului ADB cu bisectoarele unghiului ADB. Se ştie că E şi F sunt mijloacele arcelor AEB şi AFB şi că EF este diametru perpendicular pe AB în cercul ADB. De aici următoarea construcţie: Pe AB se construeşte un segment de cerc capabil de unghiul dat D. Se duce diametrul EF perpendicular pe AB şi se uneşte C cu F. Intersecţia cercului AFB cu CF determină punctul D

Simetricul D′ al cercului precedent faţă de AB dă un al doilea punct D′, care este simetricul lui D faţă de AB

Au dat această soluţie d-nii: *Cocârlan Pavel* (Lc. Timişoara), *Dăscălescu Hristache* (Lc. „Unirea", Focşani), *Iancu D.* (Lc. „Naţional", Iaşi), *Popescu St. Toma* (Lc. Piteşti), *Roman P. Ivan* (Lc. „Mihai Viteazul", Bucureşti).

Soluţia II. Construim cercul ADB. Unghiul EDC fiind drept, punctul D se află la intersecţia acestui



cerc cu cercul de diametru EC Se găsesc cele două puncte D şi D′ de la prima soluţie.

Au dat această soluţie d-nii: *Costăchescu V. C-tin*, (Lc. Militar, Iaşi), *Dimitriu Ath. Ioan* (Lc. „V. Alexandri" Galaţi), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău) *Haimovici Adolf* (Lc. Naţional, Iaşi), *Pârvu Aurel* (Lc. „Gh. Lazăr", Bucureşti), *Rumănică Ioan* (Lic. „Şaguna" Braşov). *Savin Arnold* (Lc. Focşani), *Şoimulescu I.* (Lc. „Fraţii Buzeşti", Craiova), *Sprinceană Gheorghe* (Lc. „V. Alexandri", Galaţi), *Tatulea Dionisie* (Absolvent, Tohanul Nou), *Vasiliu Gh. Gh* (Student, Leoben, Austria), şi *Zagaican Ilie* (Conductor de lucrări publice).

Soluţia III, Fie α unghiul dat ADB. Unghiul BDC va fi jumătate din $\pi - \alpha$. Deci următoarea construcţie: Se ia intersecţia D a segmentului capabil de unghiul α descris pe coarda AB cu segmentul capabil de unghiul $\frac{\pi - \alpha}{2}$ descris pe coarda BC.

Au dat această soluţie d-nii: *Albeaţă N. Emil* (Lic. Piatra-Neamţ), *Aldea N. Nicolae* (Lic. Milit., Târgovişte), *Arsene Al.* (Lic. Milit., Iaşi), *Bratoşin Radu* (Satulung-Braşov), *Ettinger Alexandru* (Lic. "Matei-Basarab", Bucureşti), *Gheorghiu Alexandru* (Lic. "Petru-Rareş", Piatra-Neamţ), *Gheorghiu Th Gh.* (Lic., Galaţi), *Hohoi V.* (Lic. „Şaguna", Braşov), *Ignat M. P.*, *Ionescu C. C.* (Lic. Milit., Iaşi), *Micula O.* (Lic. „Diaconovici-Loga", Timişoara), *Murăroiu I.* (Lic. Şaguna", Braşov), *Novac Aurel* (Cl. V, Cluj), *Popovici M.* (Focşani), *Panţu Z. Ion* (Lic. „Gheorghe Lazăr, Bucureşti), *Râmniceanu I. Christian*, *Savin C Ion* (Lic. Milit., Iaşi), *Scurţu A Nicolae* (Braşov), *Simeso Carol*, *Sirchis I.* (Lic., Thighina) şi *Stan I. Aurelian* (Lic. Militar, Iaşi).

Notă. S-a scris în paranteză după numele rezolvitorilor şcoala sau localitatea lor care se aflau la data trimiter

soluției — Problema fiind veche, situația de azi a rezolvitorilor este cu totul alta de cât cea din paranteza care urmează numelui.

Problema 2125 — *Să se rezolve în numere raționale ecuația*

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2$$

JOHANNES MAHRENHOLZ

I. *Soluție* dată de d-nii *Creța Gavril* și *Eugen Wegener.*

Ecuația dată se poate scrie

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2,$$

deci se desface în

$$(a) \qquad x+y=0, \qquad x^2 - xy + y^2 = x + y.$$

Prima dă $y = -x$ cu x rațional arbitrar. A doua reprezintă o conică ce trece prin origine, pe care o tăem cu dreapta $y = tx$, t fiind rațional; găsim soluția generală rațională

$$x = \frac{1+t}{1-t+t^2}, \qquad y = \frac{t+t^2}{1-t+t^2}.$$

II. *Altă soluție.* Rezolvind a doua ecuație (a) în raport cu x, găsim

$$x = \frac{1+y \pm \sqrt{1+6y-3y^2}}{2},$$

care dă valori raționale pentru x dacă

$$(b) \qquad 1+6y-3y^2 = K^2,$$

K fiind un număr rațional. Egalitatea precedentă se mai poate scrie

$$K^2 + 3(y-1)^2 = 4$$

sau încă

$$u^2 + 3v^2 = 4$$

cu $K = u$, $y - 1 = v$, unde u și v sunt numere raționale.

Ecuația de mai sus reprezintă o elipsă ce trece prin punctul (1, 1). Tăind-o prin dreapta $u - 1 = t(v-1)$, unde t este rațional, găsim

$$u = \frac{3+8t-3t^2}{t^2+2t+3}, \qquad v = \frac{t^2-2t-3}{t^2+2t+3},$$

din care deducem pe x și y.

Nota. 1°. Au ajuns la egalitatea (b) d-nii *Brașoveonu Gh., Cicirean Gh., Constantinescu Ilie, Grozescu Liviu, Munteanu Lucian.*

2°. Numeroși alți corespondenți au scris aberații matematice.

M. G.

Problema 2139. — *Să se rezolve în numere întregi și pozitive ecuația*

$$x + 2y + 3z(\sqrt{7})^2 = 31 + 6\sqrt{7}.$$

CAP. EUGEN ST. IACOB

Soluție. Desvoltând și egalând părțile raționale și cele iraționale între ele, obținem

$$z = 1, \quad x + 2y = 7.$$

A doua ecuație dă $x = 7 - 2y$, deci avem soluțiile

$$x = 7, 5, 3, 1, \quad y = 0, 1, 2, 3, \quad z = 1.$$

Notă. Au rezolvat problema d-nii: *Avram Cristache, Cărnațiu I., Cherdivarencu I., Chiriac Const., Cicirean Gh., Constantinescu Ilie, Cotariu M., Creța G., Enache I., Filimon I., Gâță Gh., Giurconiu Mihai, Grozescu Liviu, Ieșan Al., Ionescu Petre, Mahrenholz J., Munteanu Lucian, Mușiu A., Păläceanu V., Pat Moise, Popescu Barbu, Țigănoiu Al., Țincu Const., Tutor Aurel* și *Wegener Eug*

Problema 2207. *Să rezolve ecuația*

$$2^{\sin x + \sin 2x} = 32^{\frac{\sin 3x}{a}}.$$

Să se determine a astfel ca toate soluțiile să fie acceptabile.

N GAIU

Soluție. Ecuația dată se mai poate scri

$$2^{\sin x + \sin 2x} = 2^{\frac{5 \sin 2x}{a}},$$

de unde deducem

$$(1) \qquad \sin x + \sin 2x = \frac{5 \sin 3x}{a}.$$

Ținând seamă că

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\sin 3x = \sin 3x - 4 \sin^3 x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$= \sin x (4 \cos^2 x - 1),$$

ecuația (1) devine

$$a \sin x (1 + 2 \cos x) - 5 \sin x (4 \cos^2 x - 1) = 0,$$

sau

$$\sin x (2 \cos x + 1)[a - 5(2 \cos x - 1)] = 0.$$

De aci deducem

1^0. $\sin x = 0$, deci: $x = k\pi, (k = 0 \pm 1 \pm 2, ...)$

2^0. $\cos x = -\frac{1}{2}$,

deci:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \qquad (k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$$

3^0. $\cos x = \frac{a+5}{10}$, deci: $x = \text{arc}\cos\frac{a+5}{10}$.

Pentru ca rădăcinele ecuației din 3^0 să fie acceptabile și ele, trebuie ca

$$-1 \leq \frac{a+5}{10}, \leq 1,$$

deci:

$$-15 \leq a \leq 5.$$

Soluții bune date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Avram Cristache*, *Birănaș Ioan* (Lic. Brad), *Bolcas* (Lic. Beiuș), *Bosie Boris* (Polit.. Timișoara), *Brașoveanu Gh.*, *Chiriac C-tin* (Lt.), *Cochela Livius* (Lic. Milit,, Timișoara), *Costea D. Florian* (Lic. Beiuș), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Enache Ion* (Lt.), *Filimon Ioan*(Lic. Milit., Timișoara), *Frunză Radu* (Lic. Loga, Timișoara), *Godea I* (Polit., Timișoara), *Goldiș Gheorghe* (Lic Beiuș), *Grozescu Liviu* (Polit, Timișoara), *Ionescu Florin* (Lic. Milit, Timișoara), *Iosifescu Cicerone* (Polit., Timișoara), *Malița Mircea* (Lic. Beiuș), *Mărmureanu Gheorghe* (Lic, Milit., Timișoara), *Munteanu Lucian* (Polit., Timișoara), *Popescu I. Barbu* (Lic, Millt., Timișoara). *Rogoz* N. *Ioan* (Lic. Milit., Timișoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timișoara), *Simcso Carol* (Lic. Lugoj), *Stanciu Petru* (Timișoara), *Szabo Iuliu* (Polit., Timișoara), *Tabacu Marius* (Lic. Loga, Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara), *Țigănoiu Alexandru* (Polit., Timișoara) și *Vrânceanu G.* (Lic. Milit., Timișoara).

Notă. S'au primit încă trei soluții în care nu este determinată valoarea lui *a*.

PROBLEME PROPUSE

2273. — Câte numere de câte trei cifre, diferite între ele, sunt divizibile prin 6?

G-L GH. BUICLIU

2274. — Să se găsească un patrat de șase cifre $abcdef$ a cărui rădăcină patrată să fie diferența $def - abc$. Aceiași problemă pentru patratele de opt cifre.

Există patrate a căror rădăcină să fie diferența $abc - def$?

M. GHERMANESCU

2275. Să se arate că

$$\frac{\sqrt[3]{6+2\sqrt{7}} + \sqrt[3]{6-2\sqrt{7}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}} = 2.$$

ILIE CONSTANTINESCU

2276. — Să se arate, că

$$\frac{6\,C_2^0}{1.2.3.4.5} + \frac{8\,C_2^1}{2.3.4.5.6} + \frac{10\,C_2^2}{3.4.5.6.7} = \frac{C_3^0}{1\;2.3.4} + \frac{C_3^1}{2.3.4.5} + \frac{C_3^2}{3\;4.5.6} + \frac{C_3^3}{4.5.6.7}.$$

MARA NEUMANN

2277. — În triunghiul ABC, notăm cu D și E respectiv punctele de contact cu latura BC, a cercului I înscris în triunghiul ABC și exînscris în unghiul A.

Din punctul M, mijloc al laturei BC, se duce a doua tangentă MF la cercul înscris I.

Să se demonstreze că punctele A, E, F sunt în linie dreaptă.

CPT. AURELIAN STAN

2278. — Se ia un unghiu variabil αOx pe a cărui bisectoare interioară se ia un segment OA= constant. Prelungirea proecției ortogonale a lui A pe Ox determină un segment BC, B pe Ox, iar C pe $O\alpha$. Se ia apoi OD=BC. Perpendiculara din D pe Ox taie dreapta OA în P. Se cere locul lui P.

EUGEN SIPOS

2279. — Să se stabilească identitățile

$$\text{cotg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \text{cotg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 4\,\text{tg}^2\,2\alpha + 2,$$

$$\text{cotg}^3\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \text{cotg}^3\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 8\,\text{tg}^3\,2\alpha + 6\,\text{tg}\,2\alpha = 0.$$

V. ALACI

2280. — Pe o masă foarte lucioasă este așezat un disc circular de rază r și greutate P. O insectă de greutate Q este într'un punct de pe periferia discului. Sistemul este în repoas. La un moment dat insecta începe să se plimbe pe marginea discului cu iuțeala constantă v în raport cu acesta.

Să se studieze mișcarea absolută a insectei și a discului.

Să se studieze și cazul când insecta s'ar îndrepta către centru discului cu iuteala v.

ALEXANDRU STOENESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Avram Cristache (2136, 2138, 2139, 2154, 2192, 2202, 2217, 2223, 2234, 2241, 2242, 2243, 2245, 2252, 2257); *Barbu Gheorghe* (2230, 2261); *Birăraş Ioan* (P; 2121, 2185, 2191, 2193, 2231, 2243, 2252, 2253, 2256, 2257, 2263, 2272); *Bogza Mihai* (1405, 1507, 1516, 1583, 1936, 2060, 2086, 2087, 2190, 2205, 2242, 2247, 2261); *Braşoveanu Gheorghe* (P; 2123, 2176, 2186, 2194, 2237, 2241, 2253, 2257, 2263, 2264, 2265); *Constantinescu Ilie* (P); *Dobrotescu Gheorghe* (2196, 2223, 2261); *Ghetea Traian* (2157, 2203, 2210, 2213, 2234, 2245, 2250, 2252, 2265); *Giurconiu Mihail* (1922, 1946, 1986, 2004, 2011, 2138); *Grigore Gheorghe* (N; P; 2209, 2211, 2213, 2217, 2221, 2225, 2231, 2233, 2234, 2241, 2243, 2246, 2247, 2257, 2261, 2263, 2264, 2265, 2270); *Kinsky Ion* (2252); *Munteanu Lucian* (P; 2154, 2234, 2236, 2244); *Petrescu Viorel* (2210, 2213, 2233, 2234, 2252); *Rothenstein Bernhard* (2227, 2231, 2236, 2237, 2244, 2245, 2252); *Simcso Carol* (P; 2124, 2154, 2191, 2193, 2210, 2227, 2231, 2233, 2234, 2236, 2237, 2242, 2243, 2244, 2247, 2253, 2256, 2257, 2262); *Tarţa Valeria* (2196, 2199, 2203, 2210, 2212, 2227, 2228, 2236, 2237, 2241, 2242, 2243, 2244, 2250, 2252); *Tincu C-tin* (1564, 1583, 1653, 1956, 1693, 1697, 1698, 1711, 1717, 1737, 1741)

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXIV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 40 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXIV, cu preţul de lei 400 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XXIV. DECEMVRIE 1944 No. 10.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **M. GHERMANESCU**: UN SISTEM DIOFANTIAN
2. **ANDREI DOBRESCU**: ASUPRA UNOR CERCURI ORTOGONALE SI UNOR SFERE ORTOGONALE
3. NOTE MATEMATICE 26, 27, 28.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE 656, 2075, 2101, 2209, 2213, 2227.
7. PROBLEME PROPUSE: 2231–2288.
8. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIV (1 Martie 1944 — 1 Martie 1945), este de 350 (trei sute cincizeci) lei. Un număr 40 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 400 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 10. TIMISOARA, DECEMVRIE 1944

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

UN SISTEM DIOFANTIAN

DE

M. GHERMANESCU

Este vorba de sistemul

$$(A)\qquad \begin{aligned} A_1+A_2+\cdots+A_x&=B^p,\\ A_1^n+A_2^n+\cdots+A_x^n&=C^q,\end{aligned}$$

unde exponenții n, p, q sunt întregi pozitivi, q fiind un divizor al lui n, $n=q\,r$, căruia i se cere soluția generală în întregi.

Zicem că este suficient să cunoaștem soluția generală a ultimei ecuații a sistemului (A), pentru a deduce pe a întregului sistem.

In adevăr, vom arăta că fiecare soluție a ultimei ecuații din sistemul (A) dă o soluție a întregului sistem.

Să presupunem, pentru aceasta, că am găsit $x+1$ numere B_1, $B_2,\ldots B_x$, C_1, care verifică a doua ecuație (A); fie

$$S=B_1+B_2+\cdots+B_x=d_1\,d_2^2\cdots d_p^p,$$

unde d_i este produsul divizorilor primi ai sumei S care figurează la puterea i în S. Numerele

$$(B)\qquad A_i=d_1^{p-1}\,d_2^{p-2}\cdots d_{p-1}\,B_i,$$

$$B=d_1 d_2\ldots d_p,\qquad C=(d_1^{p-1}\,d_2^{p-2}\ldots d_{p-1})^r\,C_1$$

dau, cu $n=q\,r$,

$$\Sigma A_i=d_1^{p-1}\,d_2^{p-2}\ldots d_{p-1}\Sigma B_i=(d_1 d_2\ldots d_p)^p=B^p,$$

$$\Sigma A_i^n=(d_1^{p-1}\,d_2^{p-2}\ldots d_{p-1})^n\,\Sigma B_i^n=$$

$$=(d_1^{p-1}\,d_2^{p-2}\ldots d_{p-1})^{q\,r}\,C_1^q=C^q.$$

Zicem că ele constituesc soluția generală a sistemului (A). In adevăr, orice soluție a sistemului verifică în mod necesar ultima ecuație a acestuia, astfel că invers, considerând o soluție oarecare a acestei ultime ecuații, aceasta ori verifică și prima ecuație, deci $d_1=d_2=\ldots=d_{p-1}=1$, ori nu o verifică, dar atunci formăm soluția (B), astfel că în ambele cazuri soluția sistemului este cuprinsă în (B).

Totul se reduce deci la determinarea soluției generale a ultimei ecuații (A), ceiace nu se poate obține decât în cazuri bine determinate.

De la început, se exclude cazul $x=2$, $p\geqq 2$, căci recădem peste celebra teoremă a lui *Fermat*.

Cazul $n=p=2$, x oarecare, se poate deduce din rezultatul general stabilit în articolul meu „Egalitățile multigrade", din *Gazeta Matematică*, vol. XLV, p. 127 și urm; dacă însemnăm

$$A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_x=S_i,\quad A_{i+1}^2+A_{i+2}^2+\cdots+A_x^2=\sigma_i,$$

condiția generală de posibilitate este

$$(C)\qquad 6\,(C^2-\sigma_3^2)-2\,(S_3-B''')^2=v^2+3\,u^2,$$

care se poate strânge și mai mult, înlocuind

$$S_i=S_{i+1}+A_{i+1},\quad \sigma_i=\sigma_{i+1}+A_{i+1}^2,\ \text{etc.}$$

Astfel, pentru $x=3$, avem $S_3=0$, $\sigma_3=0$, iar condiția (C) se reduce la

$$(\alpha)\qquad 6\,C^2-2\,B^2=v^2+3\,u^2,$$

așa că soluționarea sistemului

$$(\alpha')\qquad A_1+A_2+A_3=B,^p\quad A_1^2+A_2^2+A_3^2=C^2,$$

în întregi, este legată de aceia a ecuației unice

$$2\,B^{2p}=6\,C^2-v^2-3\,u^2.$$

Pentru $x=4$, avem $S_3=A_4$, $\sigma_3=A_4^2$, iar (C) devine

$$8\,A_4^2-4\,B^p\,A_4-6\,C^2+2\,B^{2p}+v^2+3\,u^2=0,$$

care are rădăcini întregi dacă

$$(\beta)\qquad 3\,B^{2p}=12\,C^2-4\,(v^2+3\,u^2)-w^2,$$

unde w este un întreg.

Cazul $x = n = q = 3$,

$$A_1 + A_2 + A_3 = B^p, \qquad A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 = C^3$$

este iarăş solubil, căci se cunoaşte soluţia generală a ultimei ecuaţii, dată de *Euler*, apoi simplificată de *Binet* şi *Hermite**.

Ţin să semnalez că sistemul particular (A), în care $n = p = q$, a făcut obiectul problemei 1612, propusă de d-l *A. Moessner* şi rezolvată parţial în cazul $x = n = 3$, în V. XXII, p. 75.

Iată două exemple, pentru $n > 3$, deduse din identităţile

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^3,$$

$$7^5 + 43^5 + 57^5 + 80^5 + 100^5 = 107^5,$$

semnalate de d-l *A. Moessner***. Avem

$$30 + 120 + 272 + 315 = 737 = 11 \cdot 67,$$

deci numerele

$A_1 = 30.737^{p-1}$, $A_2 = 120.737^{p-1}$ $A_3 = 272.737^{p-1}$,

$A_4 = 315.737^{p-1}$, $B = 727$, $C = 353.737^{p-1}$

constitue o soluţie a sistemului

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B^p,$$

$$A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 + A_4^4 = C^4.$$

De asemeni, avem

$$7 + 43 + 57 + 80 + 100 = 287 = 7.41,$$

deci numerele

$A_1 = 7.287^{p-1}$, $A_2 = 43.287^{p-1}$, $A_3 = 57.287^{p-1}$,

$A_4 = 80.287^{p-1}$, $A_5 = 100.287^{p-1}$,

$B = 287$, $C = 107.287^{p-1}$

constitue o soluţie a sistemului

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = B^p,$$

$$A_1^5 + A_2^5 + A_3^5 + A_4^5 + A_5^5 = C^5,$$

Cele de mai sus au ca scop stimularea pentru determinarea soluţiei generale în unele cazuri concrete.

* A se vedea Nota d-l *G. G. Constantinescu* din „*Gazeta Matematică*".

** *The Tohoku Mathematical Journal*, v. 43, Part. I, March 1937, p. 190.

ASUPRA UNOR CERCURI ORTOGONALE ŞI UNOR SFERE ORTOGONALE

DE

ANDREI DOBRESCU

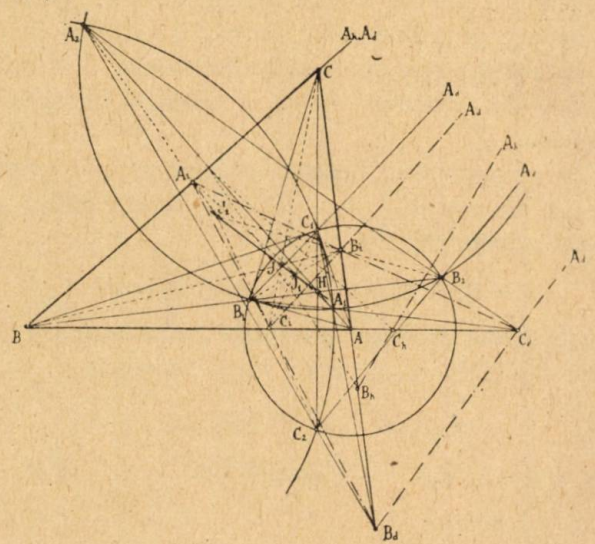
In rândurile care urmează, evidenţiez unele proprietăţi în legătură cu cercurile ortogonale cu centrele în vârfurile unui triunghiu ascuţitunghiu*), pe care le extind unor sfere ortogonale.

I.

1°. Fie (A), (B), (C) cercurile ortogonale cu centrele în vârfurile triunghiului ascuţitunghiu ABC.

Să însămnăm cu A_1, A_2 punctele de intersecţie — aflate pe înălţimea din A — ale cercurilor (B), (C) şi cu B_1, B_2 şi C_1, C_2 punctele analoage, A_1, B_1, C_1 fiind în interiorul lui ABC.

Grupurile de triunghiuri omologice: (ABC, $A_1B_1C_1$ $A_2B_2C_2$), (ABC, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_1$), (ABC, $A_2B_1C_2$, $A_1B_2C_1$), (ABC, $A_2B_2C_1$, $A_1B_1C_2$), *având ortocentrul* H *al lui* ABC *drept centru comun de omologie, au ca axe de omologie axele de omotetie directă, şi inversă ale cercurilor* (A), (B), (C).



Proprietatea aceasta este o consecinţă a faptului că B_1, C_1 şi B_2, C_2, de ex., sunt perechi de puncte *antiomoloage* ale cercurilor (C) şi (B), — deoarece punctul A, în care se întâlnesc tangentele în B_1,

*) Aceste cercuri au fost luate de d-l *C. Ionescu-Bujor* ca punct de plecare în articolul „*Asupra cercurilor ortogonale*" (Gazeta Matematică, vol. XLII, p. 455), în care arată că unui poligon i se poate ataşa un „lanţ de cercuri ortogonale".

C_1 şi B_2, C_2 la aceste cercuri, este pe axa radicală a lor (chiar înălţimea din A a lui ABC) —, de unde rezultă că dreptele B_1C_1 şi B_2C_2 trec prin centrul de omotetie directă, iar dreptele B_1C_2 şi B_2C_1 trec prin centrul de omotetie inversă, ale cercurilor (B) şi (C).

2°. Fie A_d, B_d, C_d şi A_i, B_i, C_i centrele de omotetie directă şi inversă ale cercurilor (A), (B), (C).

Centrele de omologie J, J_1, J_2 *ale triunghiului* $A_iB_iC_i$ *cu fiecare din triunghiurile* ABC, $A_1B_1C_1$ $A_2B_2C_2$ *sunt, împreună cu* H, *colineare şi formează o diviziune armonică. Punctele* J_1 *şi* J_2 *sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor* $A_1B_1C_1$ *şi* $A_2B_2C_2$ *iar* H *este potenţialul de ordinul II al lui* J.

In adevăr, cele 4 triunghiuri din enunţ au drept axă comună de omologie axa de omotetie directă a cercurilor (A), (B), (C), iar diviziunea (HJJ_1J_2) este proecţiunea din A_i a diviziunii (HAA_1A_2), care este armonică, de oarece înălţimea din B a lui ABC este polara lui A faţă de cercul (C).

Mai departe, din faptul că dreptele B_1B_i şi C_1C_i sunt bisectoarele unghiurilor drepte AB_1C şi AC_1B, urmează că triunghiul $J_1B_1C_1$ este isoscel. In mod analog triunghiurile $J_1C_1A_1$ şi $J_1A_1B_1$ sunt isoscele şi deci $J_1A_1 = J_1B_1 = J_1C_1$.

Demonstraţie asemănătoare pentru J_2.

Insfârşit, de oarece avem în valoare absolută:

$$\frac{A_iB}{A_iC} = \frac{r_b}{r_c}, \quad \frac{B_iC}{B_iA} = \frac{r_c}{r_a}, \quad \frac{C_iA}{C_iB} = \frac{r_a}{r_b},$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor (A), (B), (C), însemnează că coordonatele baricentrice ale lui J sunt $\frac{1}{r_a}, \frac{1}{r_b}, \frac{1}{r_c}$.

Avem însă, notaţiile fiind cele obişnuite:

$$r_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc\cos A = 2S\operatorname{cotg} A$$

şi deci coordonatele baricentrice ale lui J se mai scriu: $\sqrt{\operatorname{tg} A}, \sqrt{\operatorname{tg} B}, \sqrt{\operatorname{tg} C}$, de unde urmează că H, ale cărui coordonate baricentrice sunt tg A, tg B, tg C, este potenţialul de ordinul II al lui J.

3°. *Punctele* A_h, B_h, C_h, *în care axa ortică a triunghiului* ABC *taie laturile* BC, CA, AB, *sunt mijloacele segmentelor* A_dA_i, B_dB_i, C_dC_i *respectiv.*

In adevăr, polara lui A_h faţă de cercul (BC), construit pe BC ca diametru, este înălţimea din A a lui ABC, această înălţime fiind tăiată de cercul (BC) în punctele A_1 şi A_2. Urmează că dreapta A_1A_h este simediana exterioară din A_1 a triunghiului A_1BC şi deci A_h este centrul cercului lui *Apollonius* $(A_1A_dA_i)$, relativ la latura BC, al triunghiului A_1BC.

II.

1°. Să căutăm să vedem, în primul rând, în ce condiţiuni un tetraedru admite sfere ortogonale, cu centrele în vârfurile lui

Fie $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AD = a'$, $BD = b'$ şi $CD = c'$ muchiile t traedrului ABCD şi (A), (B), (C), (D) sferele cu centrele în vârfurile tetraedrului — de raze r_a, r_b, r_c, r_d —, despre care să presupunem că sunt ortogonale două câte două.

Urmează că trebuie să avem:

$$r_a^2 + r_c^2 = a^2, \qquad r_a^2 + r_d^2 = a'^2,$$
$$r_c^2 + r_a^2 = b^2, \qquad r_b^2 + r_d^2 = b'^2,$$
$$r_a^2 + r_b^2 = c^2, \qquad r_c^2 + r_d^2 = c'^2,$$

Deducem:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 = a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2,$$

ceea ce însemnează că *tetraedrul* ABCD *trebuie să fie ortocentric.*

Pe de altă parte, sferele (A), (B), (C) fiind ortogonale, cercurile de intersecţie ale acestor sfere cu planul ABC sunt ortogonale, ceea ce impune ca triunghiul ABC să fie *ascuţitunghiu.*

Aşa dar:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un tetraedru să admită sfere ortogonale, cu centrele in vârfurile lui, este ca tetraedrul să fie ortocentric şi să aibă feţele triunghiuri ascuţitunghiuri.

2°. Având un tetraedru ortocentric ABCD şi (A), (B), (C), (D) fiind sferele ortogonale cu centrele în vârfurile lui, este uşor de văzut că:

Planul determinat de o muchie şi ortocentrul H *al tetraedrului este planul radical al sferelor cu centrele în extremităţile muchiei opuse.*

Fiecare înălţime a tetraedrului este axa radicală a sferelor cu centrele în vârfurile feţei opuse.

Ortocentrul tetraedrului este centrul radical al sferelor (A), (B), (C), (D).

3°. Să însemnăm cu A_1, A_2 punctele în care sferele (B), (C), (D) sunt înţepate de axa lor radi-

cală (înălțimea din A a tetraedrului) și cu B_1, B_2, C_1, C_2 și D_1, D_2 punctele analoage, A_1, B_1, C_1, D_1 fiind în interiorul lui ABCD.

Observăm — în primul rând — că din cauza ortogonalității sferelor (A), (B), (C), *laturile feței* ABC *se văd, din punctele* D_1 *și* D_2, *sub unghiuri drepte*. Proprietate asemănătoare pentru celelalte perechi de puncte analoage.

Diviziunile $(H\,A\,A_1\,A_2)$, $(H\,B\,B_1\,B_2)$, $(H\,C\,C_1\,C_2)$ *și* $(H\,D\,D_1\,D_2)$ *sunt armonice.*

In adevăr, diviziunea (HAA_1A_2), de ex., este armonică, de oarece dreptele AD_1, AD_2 sunt tangente la cercul $(A_1D_1A_2D_2)$, comun sferelor (B), (C) și deci înălțimea din D a tetraedrului este polara lui A față de cercul considerat, de unde urmează că punctele A, H sunt conjugate armonic față de A_1, A_2.

4°. *Grupurile de tetraedre omologice (în număr de 8):*

$(ABCD,\ A_1B_1C_1D_1,\ A_2B_2C_2D_2)$, $(ABCD,\ A_1B_2C_2D_2,\ A_2\,B_1C_1D_1), \ldots$, $(ABCD,\ A_1B_1C_2D_2,\ A_2B_2C_1D_1), \ldots$ *având ortocentrul* H *a lui* ABCD *drept centru comun de omologie, au ca plane de omologie cele 8 plane de omotetie ale sferelor* (A), (B), (C), (D).

Proprietatea aceasta este o consecință a faptului că B_1, C_1 și B_2, C_2, de ex., sunt perechi de puncte *antiomoloage* ale sferelor (C) și (B), — deoarece planele tangente în B_1, C_1 și B_2, C_2 la aceste sfere se intersectează după muchia AD, care aparține planului lor radical —, de unde urmează că dreptele B_1C_1, B_2C_2 se întâlnesc în centrul de omotetie directă, iar dreptele B_1C_2, B_2C_1 se întâlnesc în centrul de omotetie inversă, ale sferelor (B) și (C).

5°. Ca încheiere, să observăm că *planul ortic al tetraedrului ortocentric* ABCD *taie fiecare muchie în mijlocul segmentului determinat de centrele de omotetie ale sferelor cu centrele în extremitățile muchiei* (de oarece planul ortic al unui tetraedru ortocentric taie fețele tetraedrului după axele lor ortice.

NOTE MATEMATICE

26. — *Asupra problemei 2173.*

In soluția ce am dat acestei probleme, la pag. 96—97, obțin egalitatea

$$\alpha_1^2 + 3\,\beta_1^2 = W_1^2,$$

examinând apoi cazul când α_1 și β_1 sunt impare.

In cazul când α_1 și β_1 sunt de paritate diferită, W_1 este impar și atunci, în baza teoremei deja invocate a lui *Lagrange*, putem lua $W_1 = \gamma^2 + 3\delta^2$, cu care se obține

$$\alpha_1^2 + 3\,\beta_1^2 = (\gamma^2 - 3\,\delta^2)^2 + 3\,(2\,\gamma\,\delta)^2,$$

deci

$$x = 3\,.\,2^m\,(\gamma^2 - 3\,\delta^2),\quad y = 3\,.\,2^{m+1}\,\gamma\,\delta,$$

$$W = 2^m\,(\gamma^2 + 3\,\delta^2),$$

apoi

$$Y = X - 3\,.\,2^{m-1}(\gamma^2 + 2\,\gamma\,\delta - 3\,\delta^2),$$

$$Z = X - 3\,.\,2^{m-1}(\gamma^2 - 2\,\gamma\,\delta - 3\,\delta^2),$$

$$U = X - 2^{m-1}(\gamma^2 - 9\,\delta^2),$$

$$V = X - 3\,.\,2^{m-1}(\gamma^2 - \delta^2),$$

unde m, γ, δ, X sunt întregi arbitrari, $m > 0$.

M. G.

27. — *Sur l'équation diophantique*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) - \Sigma\, x_i\,x_j\,x_k =$$

$$- F(y_1, y_2 \ldots y_m), \quad n \not\equiv 0 \bmod 3, \text{ et}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) - 3\,\Sigma\, x_i\,x_j\,x_k =$$

$$F = (y_1, y_2, \ldots y_m), \quad n \equiv 0 \bmod 3.$$

On suppose que F désigne un polynôme homogène du 3e degré. Une infinité de solutions de ces équations est donnée par notre théorème:

Soit l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = F(y_1, y_2 \ldots y_m)$$

dans laquelle f et F désignent deux polynômes homogènes du troissième degré. Nous supposons qu'il soit possible de déterminer n nombres entiers a_i vérifiant les n équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

et, de même m nombres entiers b_i vérifiant les m équations

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

les $(n+m)$ nombres a_i ou b_i n'étant pas tous nuls.

Mais tous les b_i peuvent p. ex. être égaux à 0. Nous avons les formules de résolution

$$\begin{cases} x_i = a_i[F(\beta_i) - f(\alpha_i)] + \alpha_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial F}{\partial \beta_i}\right), \ (i = 1, 2 \ldots n) \\ y_i = a_i[F(\beta_i) - f(\alpha_i)] + \beta_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial F}{\partial \beta_i}\right), \ (i = 1, 2 \ldots m) \end{cases}$$

Il est entendu que $f(\alpha_i) = f(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ et

$$F(\beta_i) = F(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m).$$

Dans les cas qui nous occupent ici, nous avons $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \frac{(n-1)(n-1)}{2} \sum x_i^2 - \sum x_j x_k = 0, (i = 1, 2 \ldots n)$, systéme d'équations qui est satisfait, *quelque soit* n, par $a_i = 1, \ (i = 1, 2 \ldots n)$,

Nous prendrons tous les $b_i = 0, \ (i = 1, 2 \ldots m)$.

Nous avons donc les formules de résolution.

$$\begin{cases} x_i = F(\beta_i) - f(\alpha_i) + \alpha_i \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \ (i = 1, 2 \ldots n). \\ y_i \qquad\qquad \alpha_i \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \ (i = 1, 2 \ldots m). \end{cases}$$

Applications.

$$n = 4: \quad (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) -$$

$$(x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2) = y^3$$

Exemple numérique.

$$19^3 + 23^3 + 27^3 + 31^3 -$$

$$(19.23.27 + 23.27.31 + 27.31.19 + 31.19.23) = 20^3$$

$$n = 5: \quad 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3) - \sum x_i x_j x_k = y^3$$

Exemple numérique.

$$2(22^3 + 47^3 + 72^3 + 97^3 + 122^3) -$$

$$- (22.47.72 + 22.47.97 + 22.47.122 + 22.72.97$$

$$+ 22.72.122 + 22.97.122 + 47.72.97 + 47.72.122$$

$$+ 47.97.122 + 72.97.122) = 150^3$$

$$n = 6: \quad 10(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_6^3) - 3 \sum x_i x_j x_k = y^3$$

$$n = 7: \quad 5 x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_7^3) - \sum x_i x_j x_k = y^3 \text{ etc.}$$

A. GLODEN.
(LUXEMBOURG))

---

28. — *Neegalităţi cu indicatori şi numere prime.* Imi propun să arăt că, dacă: $p_1, p_2, \ldots p_n$ reprezintă n numere prime, atunci pentru $x > y$, avem:

$$\sum_{1}^{\alpha} I_N(p_1, p_2 \ldots p_x) < \sum_{1}^{\beta} I_N(p_1, p_2 \ldots p_y)$$

unde $I_N(A)$ înseamnă numărul numerilor prime cu A din şirul de numere consecutive până la N, iar:

$$\alpha = C_n^x \qquad \text{şi} \qquad \beta = C_n^y .$$

Această neegalitate există în baza faptului că avem

$$I_N(A) < I_N(B)$$

în cazul când numărul factorilor primi a lui A este mai mare decât a lui B.

COMANDOR I. LINTES

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ADMITERE IN POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA, Noemvrie 1944

GEOMETRIE

I.

Se dă un cerc (O) de rază R. Se construesc exagoanele regulate A B C D E F şi A′ B′ C′ D′ E′ F′, înscris şi circumscris cercului (O) şi având laturile paralele.

1. Să se arate, că această figură are şase axe de simetrie, putând să le socotim de două speţe.

2. Să se calculeze *suprafaţa* şi *volumul* solidului înăscut prin rotirea *ariei*, cuprinsă între cele două exagoane regulate, în jurul:

a) unei axe de simetrie de prima speţă

b) unei axe de simetrie de a doua speţă.

II.

Se dă cercul (O) de rază R. Se consideră exagonul regulat ABCDEF şi patratul AGDH, înscrise în cercul (O).

1. Să se calculeze *aria* cuprinsă între contururile acestor două poligoane regulate.

2. Să se calculeze *suprafaţa* şi *volumul* solidului înăscut din rotirea *ariei* precedente în jurul axei GH.

(O chestiune la alegere).

(11 Noemvrie, orele 8—10½).

GEOMETRIE (Chestiuni de oral, în scris)

I.

Cazurile de asemănare ale triunghiurilor.

a) enunțare exactă; b) demonstrare; c) cazuri particulare.

II.

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea. Extindere la două poligoane asemenea.

a) enunțare; b) demonstrație; c) aplicație la geometria în spațiu.

III.

Proprietățile metrice în triunghiul dreptunghiu. Extindere la triunghiul oarecare.

a) enunțare; b) demonstrație; c) interpretare geometrică și construcții consecințe.

IV.

Deducerea volumului piramidei din acel al prizmei.

a) enunțarea proprietății fundamentale; b) demonstrarea ei.

Deducerea volumului trunchiului de piramidă.

V.

Axul radical a două cercuri.

a) ecuație; b) proprietăți.

Construcția grafică a axului radical în toate cazurile de poziție.

(*O chestiune* la alegere din grupa primelor și *una* din grupa ultimelor două).

(11 Noemvrie, orele $14^1/_2$—17.)

ALGEBRĂ.

I.

Să se determine A astfel ca expresia

$$E = \sqrt{\frac{3x^3 - x^2}{27x + 1}} - Ax$$

că aibă o limită determinată pentru $x = \infty$ și să se afle această limită.

II.

Să se determine numerile raționale a și b astfel ca ecuația ce se obține anulând derivata funcției

$$y = a\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + L\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^b + 2\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$$

să admită rădăcina $2 + \sqrt{3}$.

Inlocuind a și b cu valorile găsite, să se afle toate rădăcinele derivatei funcției date.

(L înseamnă logaritm neperian).

III.

Să se determine constantele a, b, c astfel ca polinomul

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + x^2 + x + 1$$

să se dividă prin $(x-1)^3$.

Inlocuind a, b, c cu valorile găsite, să se rezolve ecuația $P(x) = 0$.

(12 Noemvrie, orele 8—$10^1/_2$).

ALGEBRA (chestiuni de oral).

I.

Să se afle limita expresiei

$$E = \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - 2}{x - 2}$$

pentru $x = 2$.

II.

Să se rezolve ecuație

$$x^4 + 3x^3 - a^3x^2 + 3x + 1 = 0$$

și apoi să se determine toate valorile lui a pentru care ecuația dată are o rădăcină egală cu 1.

III.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x(x+1) = a(x+y+1) \\ y(y+1) = b(x+y+1). \end{cases}$$

IV.

Se dă ecuația

$$x^3 + x + 4 = 0$$

cu rădăcinele x_1, x_2, x_3.

Se cere să se formeze o ecuație de gradul al 3-lea cu rădăcinele

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}, \quad y_3 = x_3 + \frac{1}{x_3},$$

(12 Noemvrie, orele $14'/_2$ – 17).

TRIGONOMETRIE

1. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\sin x \cos y = a, \qquad \operatorname{tg} x \cot y = b.$$

2. Să se rezolve un triunghiu A B C, cunoscând latura B C = a, o înălțime B D = h, precum și raza cercului circumscris R. Discuție.

3. Doi observatori, situați la o depărtare a unul de altul zăresc un avion inamic respectiv sub unghiurile α și β, față de orizontala comună a poziției lor. In acel moment se aruncă o bombă din avion, care explodează la depărtarea b de primul observator. Să se determine înălțimea avionului în acel moment, în ipoteza că bomba a căzut vertical.

4. Să se verifice identitățile

$$\sin(a-b)\sin(a+b) + \sin(b-c)\sin(b+c) + \sin(c-a)\sin(c+a) = 0,$$

$$\sin(a-b)\cos(a+b) + \sin(b-c)\cos(b+c) + \sin(c-a)\cos(c+a) = 0.$$

(13 Noemvrie, orele 8—$10^1/_2$).

TRIGONOMETRIE (chestiuni de oral)

1. Să se rezolve ecuația

$$9\sin 4x - 4\operatorname{tg} 2x + 9\sin 2x - 4\operatorname{tg} x = 0.$$

2. Să se rezolve un triuughiu A B C, cunoscând două laturi A C = b, A B = c, precum și unghiul B, opus laturii A C. Discuție. Câte triunghiuri corespund la aceleași date?

3. In orice triunghiu, avem

$$a\sin(B - C) + b\sin(C - A) + c\sin(A - B) = 0,$$

unde a, b, c sunt mărimile laturilor, iar A, B, C unghiurile opuse.

4. Să se afle, fără ajutorul derivatelor, limita expresiei

$$E = \frac{\cos^3 2x - \cos^3 2a}{\sin^2 x - \sin^2 a},$$

pentru $x = a$.

(13 Noemvrie, orele $14^1/_2$—17).

BIBLIOGRAFIE

1. *Victor Vâlcovici.* Sur le distribution des axes principaux d'inertie. (Extrait de la „Malhematica" XX, pp. 113—136.)

2. Prof. Dr. Ing. *Aurel Bărglazan* şi Conf. Ing. *Victor Gheorghiu.* Probleme de Hidrotehnică.

Această lucrare didactică are 204 p. litografiate şi conţine 82 de probleme intcresante, din domeniul Hidromecanicei aplicate şi a Maşinelor hidraulice. Problemele, sunt ilustrate de 114 figuri clare, estetic prezentate şi se referă la următoarele 12 capitole: Presiuni în lichide, împingerea apei pe suprafeţe plane şi cilindrice, lichide sub presiune, plutire stabilă, repaos relativ, teorema impulsului, mişcarea plană potenţială, orificii şi deversoare, conducte, turbine, pompe şi pompe cu piston.

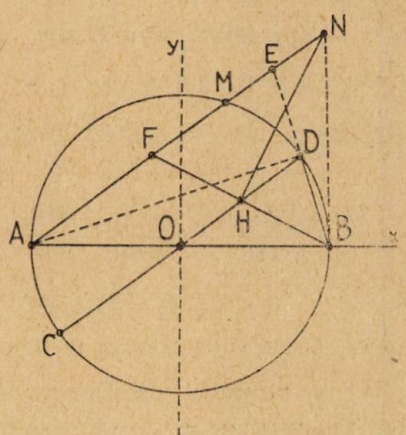
O recomandăm călduros studenţilor de la Facultăţile de Ştiinţe şi de la Politehnici.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 656. — *In cercul* O *se duce diametrul* AB *şi secanta* AM. *Diametrul paralel la* AM *taie cercul* O *în* C *şi* D. BD *taie pe* AM *în* E, FB *taie pe* CD *în* H, F *fiind mijlocul lui* AE. *Perpendiculara dusă prin* H *pe* FB *taie pe* AM *în* N. *Să se afle locul geometric al lui* N *când* AM *variază.*

LAPADATU I. MICLEA

I. *Soluţie geometrică.* Raza OD trecând prin mijlocul lui AB şi fiind paralelă cu AE este egală cu jumătate din AE, deci



$$(1) \qquad \overline{OD} = \overline{AF}.$$

Pentru acelaşi motiv H este mijlocul lui BF, deci triunghiul BNF este isoscel şi

$$(2) \qquad \overline{NB} = \overline{NF}.$$

Din (1) şi (2) deducem

$$\overline{NA} - \overline{NB} = \overline{NA} - \overline{NF} = \overline{AF} = R,$$

ceia ce arată că N descrie o iperbolă cu centrul în O şi cu focarele în A şi B.

Au dat această soluţie d-nii: *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău); *Ghişoiu I. Petre* (Cl. VI. Lic. „Spiru Haret", Bucureşti); *Micula O*, *Mihăileanu N. N.* (Constanţa); *Mihaiu Gh.* (Cl. VI. Lic. Milit., Craiova) şi *Sprinceană Gh.* (Lic. „V. Alexandri", Galaţi).

II. *Soluţie analitică.* Luăm ca axe pe AB şi diametru perpendicular pe AB. Dacă R este raza cercului O şi λ un parametru variabil, avem

$$A(-R, 0); \quad B(R, 0);$$

$$(AM) \quad y = \lambda(x + a); \quad (OD) \quad y = \lambda x,$$

de unde se scoate

$$D\left[\frac{R}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{\lambda R}{\sqrt{1+R^3}}\right].$$

Din cauza simetriei rezultatelor nu mai luăm şi semnul minus.

Punctul H fiind la mijlocul lui OD, avem

$$H\left[\frac{R}{2\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{\lambda R}{2\sqrt{1+\lambda^2}}\right]$$

*** $(BH) \qquad y = \dfrac{\lambda(x - R)}{1 - 2\sqrt{1+\lambda^2}}$

şi deci perpendiculara în H pe BH

$$(HN) \quad 2\lambda y + 2(1 - 2\sqrt{1+\lambda^2})x - R(\sqrt{1+\lambda^2} - 2) = 0$$

Locul lui N se obţine eliminând pe λ între ecuaţia (AM) şi (HN). Rezultatul acestei eliminări este

$$12x^2 - 4y^2 - 3R^2 = 0,$$

care este o iperbolă cu centrul în O, cu focarele în A şi B şi cu axele egale respectiv cu $\frac{a}{2}$ şi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A dat această soluţie d-l *N. N. Mihăileanu* la 26 Mai 1932, când era elev la liceul din Constanţa.

Soluţii analoage s'au primit de la d-nii: *Bârş D. Petre* (Student); *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău); *Novacu V.* (Arad) şi *Scurtu Nicolae* (Lic. „Saguna", Braşov).

Problema 2075. — *Avem*

$$\begin{cases} 63+63+21=35+35+77, \\ 63^2+63^2+21^2=35^2+35^2+77^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 63+63+25=35+35+81, \\ 63\,.\,63\,.\,25=35\,.\,35\,.\,81. \end{cases}$$

Se cere soluția generală în numere întregi a sistemului

$$2A+B=2C+D, \qquad 2A+K=2C+L,$$
$$2A^2+B^2=2C^2+D^2 \qquad A^2K=C^2L.$$

A. MOESSNER

Soluție. Sistemul are soluția evidentă $A=C$, $B=D$, $K=L$. Să căutăm însă alte soluții.

Eliminând K sau L între ultimele două ecuații ale sistemului dat, obținem, de oarece $A\neq C$,

$$2A^2=L(C+A), \qquad 2C^2=K(C+A)$$

Fie α c. m. m. d. c. al numerelor A și C, $A=\alpha a$, $C=\alpha c$, unde a și c sunt prime între ele; egalitățile precedente devin

$$2a^2\alpha=L(c+a), \qquad 2c^2\alpha=K(c+a).$$

Cum $c+a$ este prim cu a și c, trebue să avem

$$L=a^2l, \qquad K=c^2k,$$

deci $2\alpha=l(c+a)=k(c+a)$, care conduce la $l=k$, apoi

$$(1) \qquad 2A=al(c+a), \quad 2C=cl(c+a),$$
$$L=a^2l, \qquad K=c^2l,$$

unde $l(c+a)$ este par. Aceste formule (1) dau soluția generală a sistemului format de ultimele două ecuații.

Considerând acum sistemul format de primele două ecuații, îl putem scrie

$$(\alpha) \quad 2(A-C)=D-B, \quad 2(A^2-C^2)=D^2-B^2,$$

din care deducem

$$A+C=D+B$$

care, împreună cu prima ecuație (α), dă

$$(2) \qquad 4D=3A-C=l(c+a)(3a-c)$$
$$4B=3C-A=l(c+a)(3c-a).$$

Soluția generală a sistemului propus este dată astfel de (1) și (2), în care a, c, l sunt întregi arbitrari, a și b de aceiaș paritate și l oarecare; sau a și b de paritate diferită și $l=4m$.

Notă. Soluții parțiale au dat d-nii: *Const. Chiriac, J. Mahrenholz* și *V. Păläceanu.*

Exemplul din problemă corespunde la $a=9$, $c=5$, $l=1$. M. G.

Problema 2101. — *Să se găsească minimul expresiei*

$$E=\cot A+\cot B+\cot C,$$

A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu.*

M. GHERMANESCU

I. De oarece $C=180^0-(A+B)$, putem scrie

$$E=\cot A+\cot B-\cot(A+B),$$

așa că avem de cercetat minimul unei funcții de două variabile independente, E(A, B).

Anulându-i derivatele parțiale de primul ordin, vom avea

$$\frac{\partial E}{\partial A}=-\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2(A+B)}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 C}{\sin^2 C\sin^2 A}=0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial B}=-\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2(A+B)}=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 C\sin^2 B}=0,$$

care duce la

$$\sin^2 A=\sin^2 B=\sin^2 C.$$

Dar unghiurile A, B, C sunt două ascuțite, iar al treilea ascuțit sau obtuz, deci sinusurile lor sunt totdeauna pozitive, așa că rezultă

$$\sin A=\sin B=\sin C>0.$$

Prima egalitate dă $A=B$, a doua dă $C=A$ sau $C=180^0-A$. Ultima egalitate este însă inacceptabilă căci conduce la $A=0$, astfel că rămâne $A=B=C=60^0$, $\cot 60^0=\sqrt{3}$, deci

$$E=\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}.$$

$\sqrt{3}$ reprezintă, în adevăr, un *minimum*, căci expresia

$$\text{II.} \qquad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial A\,\partial B}\right)^2-\frac{\partial^2 E}{\partial A^2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial B^2}$$

este negativă pentru $A=B=C=60^0$.

II. Soluție dată de d-l *Eugen Wegener.*

Fie ABC un triunghiu oarecare și să considerăm latura BC prelungită ca axă a x-lor, iar per-

pendiculara pe mijlocul acesteia ca axă a y-lor. Avem : $BC = a$ şi prin urmare:

$$B\left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad C\left(-\frac{a}{2}, 0\right) \quad \text{Fie} \quad A(x, y).$$

Pe figură se vede că:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{a - 2x}{2y}, \qquad \operatorname{cotg} C = \frac{a + 2x}{2y}$$

şi ţinând seamă că:

$$\operatorname{cotg} A = -\operatorname{cotg}(B + C) =$$

$$\frac{1 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C} = \frac{4x^2 + 4y^2 - a^2}{4ay}$$

şi înlocuind în E avem:

$$x^2 + y^2 - a E y + \frac{3a^2}{2} = 0.$$

Conchidem că vârful A se află pe cercul cu centrul în punctul de coordonate $\left(0, \frac{aE}{2}\right)$ şi având raza R egală cu

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{E^2 - 3}.$$

Impunând condiţia ca raza să fie reală, care e de fapt condiţia ca cercul să fie real, găsim

$$-\sqrt{3} \geq E \geq \sqrt{3}.$$

Deducem de aci că minimul lui E este $\sqrt{3}$. Ţinând seamă că : $\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$ deducem că minimul lui E este atins odată cu maximul unghiului lui *Brocard* ($\omega = 30^\circ$).

Notă. 1°. Soluţii apropiate au dat d-nii : *Al. Bitang* şi *Gavril Creţa* (Politechnica, Timişoara), precum şi *Eug. Vişa* (Profesor, Arad).

2°. Altă soluţie a dat d-l *Kinsky Ion*.

3°. D-l *J. Mahrenholz*, pornind dela relaţia care dă unghiul lui *Brocard*

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C,$$

conchide minimul, dar aceasta nu este o demonstraţie, căci dacă maximul lui ω este cunoscut, acesta se deduce tocmai din minimul cerut. Aceasta ne face să bănuim că problema este cunoscută.

4°. Iată o soluţe care nu necesită cunoaşterea teoriei generale a maximului şi minimului unei funcţii de două variabile indepedente.

Fie k minimul expresiei date, $E \geq A$; cum avem

$$\cot C = -\cot(A + B) = \frac{1 - \cot A \cot B}{\cot A + \cot B},$$

deducem, de oarece $\cot > 0$, $\cot B > 0$,

$$\cot^2 A + (\cot B - k)\cot A + \cot^2 B - -k \cot B + \geq 0.$$

Acest trinom de gradul al doilea în cot A, păstrând un semn constant, trebue ca realizantul său să fie mereu *negativ*, deci

$$3\cot^2 B - 2k \cot B - k^2 + 4 \leq 0.$$

Avem din nou un trinom de gradul al doilea, care trebue să fie mereu pozitiv, deci

$$k^2 + 3(k^2 - 4) \leq 0,$$

de unde $k \leq \sqrt{3}$. $\sqrt{3}$ este deci valoare cea mai mare pe care o poate avea k, astfel că regăsim rezultatul de mai sus, care dă

$$E - \sqrt{3} = \left(\cot A + \frac{\cot B - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\cot B)^2 \geq 0$$

M. G.

Problema 2209. *Să se găsească un număr de patru cifre egal cu de şase ori patratul sumei cifrelor sale,*

V. THÉBAULT

Soluţie. Fie $a\,b\,c\,d$ numărul de patru cifre cerut. Conform enunţului avem

1) $\quad 1000a + 100b + 10c + d = 6(a + b + c + d)^2.$

Notând $a + b + c + d = n$, unde evident $n \leq 36$, relaţia (1) devine

$$999a + 99b + 9c = 6n^2 - n,$$

de unde deducem

(2) $\qquad 111a + 11b + c = \frac{n(6n - 1)}{9}$

Cum primul membru este un număr întreg, iar factorul $6n - 1$ este prim cu 9, rezultă din (2) că nu putem lua de cât

$$n = 9,\ 18,\ 27,\ 36.$$

1°. Pentru $n = 9$, relaţia (2) dă

$$111a + 11b + c = 53,$$

ceea ce nu este posibil, căci a este cifră semnificativă.

2°. Pentru $n = 18$, relaţia (1) dă pentru $a\,b\,c\,d$ numărul 1944, care este soluţie, fiindcă

$$1 + 9 + 4 + 4 = 18 = n.$$

3°. Pentru $n = 27$, relaţia (1) dă pentru $a\,b\,c\,d$ numărul 4374, care nu este soluţie, fiindcă

$$4 + 3 + 7 + 4 = 18 \neq 27.$$

4°. Pentru $n = 36$, relația (1) dă pentru $a\,b\,c\,d$ numărul 7766, care nu este soluție, fiindcă

$$7 + 7 + 7 + 6 = 27 \neq 36.$$

Singura soluție a problemei este astfel numărul 1944, care reprezintă anul în care s'a propus și rezolvat problema.

Soluții date de d-ra *Măran Ana* (Polit, Timișoara) și de d-nii *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Barbu Ion* (Lic. Caracal), *Brașoveanu Gheorghe* (Lic. T.-Severin), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Costea Florian* (Lic. Beiuș), *Dăscălescu Hristache* (R.-Sărat), *Enache Ion* (Lt.), *Godea Ioan* (Polit., Timișoara), *Grigore Gh.*, *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2213. *Cineva întrebat anul acesta ce vârsta are, răspunde: Peste șase ani voiu avea vârsta egală cu suma cifrelor anului nașterei mele. Se cere această vârstă.*

ION DILI SCHILERU

Soluție. Problema a fost propusă în „R. M. T." în Martie 1944, deci conform enunțului, acea persoană în 1950 va avea vârsta egală cu suma cifrelor anului nașterei sale.

Acum vom lua în cercetare două cazuri, după cum presupunem că acea persoană s'a născut în secolul XX sau XIX.

1°. Fie anul $19xy$ anul nașterei. Conform enunțului trebuie să avem

$$1 + 9 + x + y = 1950 - 19xy,$$

sau

$$10 + x + y = 1950 - 1900 - 10\,x - y.$$

De aci deducem

$$(1) \qquad x = \frac{40 - 2\,y}{11} = \frac{2\,(20 - y)}{11}.$$

Cum x, y sunt întregi pozitivi de o singură cifră, se vede cu ușurință că ecuația (1) are numai soluția

$$x = 2, \qquad y = 9.$$

Anul nașterei este prin urmare 1929, iar vârsta acelei persoane este

$$1 + 9 + 2 + 9 = 21,$$

adică „*majoratul*".

2°. Fie $18\,x\,y$ anul nașterei. Conform enunțului trebuie să avem

$$1 + 8 + x + y = 1950 - 18\,x\,y,$$

sau

$$9 + x + y = 1950 - 1800 - 10\,x - y.$$

De aci deducem

$$(2) \qquad x = \frac{141 - 2\,y}{11}.$$

Cum x, y sunt întregi pozitivi mai mici ca 10, se vede că ecuația (2) n'are soluție, deci presupunerea noastră că acea persoană s'ar fi putut naște în secolul XIX, îndeplinind condițiile problemei, nu este posibilă.

Soluții date de d-ra: *Măran Ana* (Polit, Timișoara) și de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timișoara), *Barbu Ion* (Lic. Caracal), *Bică Emilian* (Brașov), *Birănas Ion* (Lic. Brad), *Bossie Boris* (Polit., Timișoara), *Brașoveanu Gheorghe* (Lic. T.-Severin), *Costea Fl.* (Lic. Beiuș), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Dăscălescu Hristache* (R.-Sărat), *Dumitrescu Ioan* (Reșița), *Enache Ion* (Lt. pe front), *Goldiș Gh.* (Lic. Beiuș), *Groza Liviu* (Lic. Deva), *Iosifescu Ciceronе*, *Malița Mircea* (Lic. Beiuș), *Mărmureanu Gh.* (Lic. Milit., Timișoara), *Mazilu Marius* (Lic. Caransebeș), *Miclea Nicolae*, *Munteanu Lucian* (Polit., Timișoara), *Simcso Carol* (Lugoj), *Stanciu Petru* (Timișoara), *Țigănoiu Alexandru* (Polit, Timișoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2227. — *Să se determine a, b, c, astfel ca polinomul întreg*

$$x^p + a\,x^{p-1} + b\,x + c, \qquad (p \geqq 5)$$

să se dividă prin $(x-1)^3$ și în acest caz să se afle câtul.

V. ALACI

Soluție. Notând cu $P(x)$ polinomul dat, primele sale două derivate sunt,

$$P'(x) = p\,x^{p-1} + a\,(p-1)\,x^{p-2} + b$$

$$P''(x) = p\,(p-1)\,x^{p-2} + a\,(p-1)\,(p-2)\,x^{p-3}.$$

Pentru ca $P(x)$ să se dividă prin $(x-1)^3$, trebuie ca pentru $x = 1$ să se anuleze simultan $P(x)$, $P'(x)$ și $P''(x)$, ceea ce ne dă

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ p + a\,(p-1) + b = 0 \\ p\,(p-1) + a\,(p-1)\,(p-2) = 0. \end{cases}$$

Din relația 3-a deducem

$$a = -\frac{p}{p-2},$$

valoare care introdusă în relația 2-a din (1), ne dă

$$b = \frac{p}{p-2}.$$

In fine, introducând valorile găsite pentru a şi b în prima relaţie din (1), deducem

$$c = -1.$$

Ţinând seamă de valorile găsite pentru a, b, c, urmează că polinomul cerut, este

$$P(x) = x^p - \frac{p}{p-2}x^{p-1} + \frac{p}{p-2}x - 1 =$$

$$\frac{1}{p-2}[(p-2)x^p - p\,x^{p-1} + p\,x - (p-2)].$$

Rămâne a mai afla câtul împărţirei polinomului $P(x)$ prin $(x-1)^3$.

Pentru aceasta împărţim $P(x)$ prin $x-1$, câtul $Q_1(x)$ îl împărţim iarăşi prin $x-1$ şi noul cât $Q_2(x)$ îl împărţim tot prin $x-1$, obţinând câtul cerut $Q_3(x)$.

Vom avea în vedere în acest scop, rezultatul cunoscut, că un polinom de forma

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_{p-1}x + A_p$$

împărţit prin $x-1$, dă câtul

$$A_0 x^{p-1} + (A_0 + A_1)x^{p-1} + \cdots + (A_0 + A_1 + \cdots + A_{p-1}).$$

In virtutea acestei observări şi ţinând seamă de cele spuse mai sus, câtul împărţirei lui $P(x)$ prin $x-1$, este

$$Q_1(x) = \frac{1}{p-2}[(p-2)x^{p-1} - 2x^{p-2} - 2x^{p-3} - \cdots - 2x + (p-2)];$$

câtul împărţirei lui $Q_1(x)$ prin $x-1$ este

$$Q_2(x) = \frac{1}{p-2}\left[(p-2)x^{p-2} + (p-4)x^{p-3} + (p-6)x^{p-4} + \cdots + (p-2k)x^{p-k-1} + \cdots - (p-4)x - (p-2)\right]$$

şi în fine câtul împărţirei lui $Q_2(x)$ prin $x-1$ este,

$$(2)\quad Q_3(x) = \frac{1}{p-2}\left\{(p-2)x^{p-3} + (2p-6)x^{p-4} + (3p-12)x^{p-5} + \cdots + \left(kp - 2\sum_1^k k\right)x^{p-k-2} + \cdots + \left[(p-2)p - 2\sum_1^{p-2} k\right]\right\};$$

unde $(p-2)p - 2\sum_1^{p-2} k = p-2.$

Câtul împărţirei lui $P(x)$ prin $(x-1)^3$ este astfel $Q_3(x)$ dat de relaţia (2).

Soluţii date de d-ra *Măran Ana* (Polit, Timişoara), şi de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Barbu Ion* (Lic. Caracal), *Birănaş Ioan* (Arad), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Dăscălescu Hristache* (R.-Sărat), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Stanciu Petru* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Observare. Pentru partea 2-a a problemei, adică pentru a afla câtul împărţirei polinomului

$$(3)\qquad (p-2)x^p - p\,x^{p-1} + p\,x - (p-2)$$

prin $(x-1)^3$, am văzut că a trebuit să facem trei împărţiri succesive; am împărţit polinomul $P(x)$ prin $x-1$, apoi câtul $Q_1(x)$ l'am împărţit iarăşi prin $x-1$ şi în fine noul cât $Q_2(x)$ l'am împărţit tot prin $x-1$, obţinând câtul cerut.

Dar, în loc să efectuăm aceste trei împărţiri succesive, putem obţine direct câtul, folosind următoarele cunoştinţi care pot servi şi în alte cazuri asemănătoare.

In adevăr, în articolul "*Les expressions du reste et du quotient de la division de deux polynômes*" pe care l-am publicat în „Bulletin Scientifique de L'Ecole Polytechnique de Timişoara, Tome 4, Fasc. 3—4, 1932, am stabilit că, expresia câtului împărţirei unui polinom de forma

$$(4)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p$$

prin $(a-x)^q$, unde p şi q sunt întregi pozitivi, $q \leqq p$, este

$$(5)\quad Q(x) = (-1)^q[a^p x^{p-q} + (a_{p-1} + I_q^1 a_p a)x^{p-q-1} +$$

$$+ (a_{p-2} + I_q^1 a_{p-1} a + I_q^2 a_p a^2)x^{p-q-2} + \cdots$$

$$\cdots + (a_q + I_q^1 a_{q+1} a + I_q^2 a_{q+2} a^2 + \cdots + I_q^{p-q} a_p a^{p-q})],$$

în care I_q^r înseamnă combinări cu repetiţie a q obiecte luate câte r, deci

$$I_q^r = \frac{q(q+1)\ldots(q+r-1)}{r!}.$$

In cazul nostru, avem de împărţit polinomul[1])

$$(6)\qquad (p-2) - p\,x + p\,x^{p-1} - (p-2)x^p$$

prin $(1-x)^3$.

[1]) Am ordonat polinomul (3) după puterile crescătoare ale lui x şi am înmulţit cu -1 deîmpărţitul şi împărţitorul câtul neschimbându-se.

Identificând acum coeficienții polinoamelor (4) și (6), avem

$$a_0 = p-2, \quad a_1 = -p, \quad a_2 = a_3 = \cdots$$

$$\cdots a_{p-2} = 0, \quad a_{p-1} = p, \quad a_p = -(p-2)$$

și ținând încă seamă că $a=1$, $q=3$, expresia directă a câtului cerut, conform formulei (5), este în cazul nostru

$$Q(x) = -\Big\{-(p-2)x^{p-3} + [p-3(p-2)]x^{p-4} + \\ + [3p-6(p-2)]x^{p-5} + \cdots \\ \cdots + \left[\frac{p-3)(p-2)}{2}p - \frac{(p-2)(p-1)}{2}(p-2)\right]\Big\},$$

sau încă, simplificând, avem

$$Q(x) = (p-2)x^{p-3} + (2p-6)x^{p-4} + (3p-12)x^{p-5} + \cdots + (p-2),$$

rezultat analog ca în soluția dată.

V. A.

PROBLEME PROPUSE

2281. — Să se afle două patrate consecutive de câte patru cifre, știind că rădăcina patrată a unuia dintre ele este reprodusă de numărul de două cifre dela mijlocul celuilalt patrat.

LUCIAN MUNTEANU

2282. — Se construesc trei patrate $a\,b\,c\,d$, $c\,e\,f\,g$, $f\,h\,j\,i$ așa în cât vârfurile a, c, f, j să fie în linie dreaptă. Să se scrie în fiecare vârf câte un număr astfel ca cele 10 numere să fie numere consecutive, iar dublul sumei numerelor de pe linia $a\,c\,f\,j$ să fie egal cu suma tuturor numerelor scrise în celelalte vârfuri ale patratelor.

G-L GH. BUICLIU

2283. — Să se determine două polinoame $P(x)$, $Q(y)$, care să satisfacă relația funcțională

$$P(x+y) - Q(x+y) = P(x)\,P(y) - Q(x)\,Q(y)$$

M GHERMANESCU

2284. — Să se determine numerile raționale a și b astfel ca ecuația ce se obține anulând derivata funcției

$$y = a\frac{1-x}{1+x} + L\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^b + 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$$

să admită rădăcina $2+\sqrt{3}$.

Înlocuind a și b cu valorile găsite, să se afle toate rădăcinele derivatei funcției date.

(L înseamnă logaritm neperian).

V. ALACI

2285. — Să se calculeze limita expresiei

$$\frac{n + \cos a_0 x - \sum_{i=1}^{n+1} \cos a_i x}{\sin^2 a x}$$

pentru $x=0$.

MARIA NEUMANN

2286. — Din punctul A exterior cercului O se duce dlametrul AO și tangenta AT la cerc. Se cere să se ducă o secantă, care tae cercul O în punctele M, N, astfel în cât coarda MN să fie latura patratului înscris în cercul O.

Dacă în punctele M și N se duc tangentele la cerc, tangente ce tae diametrul AO în punctele P și P_1, iar din P și P_1 se coboară perpendicularele PR și P_1R_1 pe tangenta AT la cerc, atunci triunghiurile MPR și NP_1R_1 sunt isoscele.

CPT. AURELIAN STAN

2287. — Intr'un triunghiu oarecare ABC, fie A', B', C', proecțiile centrului de greutate G pe laturile BC, CA și AB.

Să se demonstreze că,

$$\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GC'} = \frac{3}{r},$$

unde r e raza cercului înscris.

ILIE CONSTANTINESCU

2288. — Să se stabilească identitatea

$$\sum \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}} = 1,$$

oricare ar fi arcele a, b, c.

IONEL I. STAMATE

ŞCOALA POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA

LISTA

Candidaţilor reuşiţi la examenul de admitere în Politehnică în ordinea clasificaţiei.
(11—12 Noemvrie 1944).

1. **Kaufman Iosif,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
2. **Laszlo Toma,** Liceul Israelit, Timişoara.
3. **Kalman Ioan,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
4. **Kinsky Ioan,** Liceul Israelit, Timişoara.
5. **London Emeric,** Liceul Israelit, Timişoara.
6. **Postelnicu Mihai,** Lic. Milit. N. Filipescu, Predeal.
7. **Löwenfeld Viliam,** Liceul Israelit, Timişoara.
8. **Rothenstein F. Bernhard,** Lic. Israelit, Timişoara.
9. **Wolf Emeric,** Liceul Israelit, Timişoara.
10. **Feldmann Victor,** Liceul Israelit, Timişoara.
11. **Kluger Ivan Alexandru,** „Moise Nicoară", Arad.
12. **Roth Rudolf Egon,** Liceul Piarist, Timişoara.
13. **Brasch Andrei,** Liceul Israelit, Timişoara.
14. **Kovacs E. Paul,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
15. **Silaghi T. Ionel,** Liceul „Moise Nicoară", Arad.
16. **Vasiliu N. Ioan,** Liceul Naţional Iaşi.
17. **Gaivoronschi V. Igor,** Lic. „B. P. Haşdeu" Chişinău.
18. **Glinski Vl. Tadeusz,** Liceul Polonez, Craiova.
19. **Deneş Ritia Mariana,** Liceul Israelit, Timişoara
20. **Kinsky Ştefan,** Liceul Israelit, Timişoara.
21. **Popescu A. Romeo,** Lic. „C. D. Loga", Timişoara.
22. **Savu T. Viorel,** Liceul „Titu Maiorescu", Aiud.
23. **Rex Ladislau,** Liceul Israelit, Timişoara.
24. **Sichirliischi Vl. Ioan,** Lic. „B. P. Haşdeu", Chininău.
25. **Tuca M. Marcu,** Liceul „Traian Doda", Caransebeş.
26. **Glauber Gheorghe,** Liceul Israelit, Timişoara.
27. **Ighia Mircea,** Liceul „Regele Ferdinand", Turda.
28. **Bucur V. Ilie,** Liceul „Dragoş Vodă", Câmpulung.
29. **Popovici Gh. Milan,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
30. **Schauer Alexandru,** Liceul Israelit, Arad.
31. **Garcea D. Vasile,** Lic. „C. D. Loga", Timişoara.
32. **Barta Toma,** Liceul Piarist, Timişoara.
33. **Schegerin Oto,** Liceul Piarist, Timişoara.
34. **Glod Gheorghe,** Liceul „Roman Vodă", Roman.
35. **Ispas Vasile,** Liceul „Aurel Vlaicu", Orăştie.
36. **Mureşan Iuliu,** Liceul „C. Brediceanu", Lugoj.
37. **Bocu Aurel,** Liceul „Andrei Şaguna", Braşov.
38. **Eşanu Eugen,** Liceul „Moise Nicoară", Arad.
39. **Fenyves Gheorghe,** Liceul Israelit, Timişoara.
40. **Popescu A. Ioan,** Liceul „Moise Nicoară", Arad.
41. **Artimescu A. Virgil,** Liceul „Moise Nicoară", Arad.
42. **Kohanyi A. Ervin,** Liceul „Gh. Barițiu", Cluj.
43. **Szecsi Eugen,** Liceul Piarist, Timişoara.
44. **Popovici Gh. Dumitru,** Lic. „Roman Vodă", Roman.
45. **Samuel Andrei,** Lic. „Mihai Vit.", Alba Iulia.
46. **Stein Emil,** Liceul Piarist, Timişoara.
47. **Ceman Liviu,** Lic. Milit. „Mihai Viteazul", Timişoara.
48. **Pagu Linţea Ioan,** Liceul „Sf. Vasile", Blaj.
49. **Pera Gh. Ştefan,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
50. **Popescu N. Ştefan,** Liceul Naţional, Iaşi.
51. **Hamburger Gheorghe,** Liceul Israelit, Timişoara.
52. **Cobilanschi Leon,** Liceul „Dragoş Vodă", Câmpulung (Bucovina).
53. **Gabor E. Gheorghe,** Liceul „Radu Negru", Făgăraş.
54. **Pârjol Ştefan,** Liceul CFR „A. Vlaicu", Bucureşti.
55. **Regep Gheorghe,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
56. **Holban Grigore,** Liceul „C. D. Loga", Timişoara.
57. **Miclăuş Ioan,** Liceul „Gh. Lazăr", Sibiu.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Barbu A. Iou (2212, 2216, 2250, 2268, 2269, 2270, 2272, 2276); *Barbu I. Popescu* (1737, 1746, 1751, 1906, 2087, 2174, 2217, 2218, 2227, 2243, 2250, 2257, 2276); *Bogza Mihai* (2263, 2264); *Brasch Andrei* (2231, 2244, 2252, 2256, 2264, 2278, 2279); *Cochela Livius* (2250, 2273, 2276); *Creţa Gavril* (P; 1659, 2050, 2194, 2198, 2209, 2217, 2225, 2233, 2234, 2241); *Denes R. Mariana* (2236, 2244, 2252, 2269, 2271, 2278, 2279); *Dobrotecsu M. Gh.* (1951, 2032, 2060, 2247); *Filimon Ioan* (2210, 2236, 2241, 2243, 2250, 2256, 2265, 2276, 2279); *Ionescu A. Florin* (2276); *Marius A. Scumpia* (P); *Mazilu Marius* (2209, 2217, 2218, 2232, 2236, 2242, 2244, 2245, 2250, 2252, 2263, 2264, 2265, 2268, 2269, 2279); *Miclea Nicolae* (2135, 2227, 2231, 2233, 2236, 2241, 2244, 2252, 2253); *Munteanu Lucian* (P; 2209); *Rogoz Ioan* (2233, 2241, 2250, 2257, 2265, 2276); *Rothenstein Bernhard* (1856, 1895, 1896, 1902, 2088, 2150, 2151, 2161, 2191, 2192, 2198, 2250, 2276, 2278, 2279); *Stan Aurelian* (N; P); *Tutor Aurel* (2210, 2213, 2217, 2218, 2220, 2227, 2231, 2232, 2233, 2234, 2236, 2237, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2250, 2252, 2253, 2256, 2257, 2261, 2263, 2264, 2269); *Vrânceanu Gh.* (1858, 1874, 1882, 1898, 1906, 2065, 2273, 2276).

ANUL XXIV. IANUARIE 1945 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIATIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 40 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. V. IONESCU**: ASUPRA UNEI TEOREME A D-LUI V. THEBAULT
2. **G. IUGA**: TEOREME DIN GEOMETRIA ANALITICA
3. NOTE MATEMATICE 29, 30, 31.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1492, 1836, 1997, 2152, 2214, 2228.
6. PROBLEME PROPUSE: 2289–2296.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 — 1 Martie 1946), va fi de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

„R. M. T." aduce vii mulţumire d-lui Prof. *I. V. Măties* pentru cele 23 abonamente trimise pentru elevii D-sale.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 800 lei fiecare.

ANUL XXIV — NO. 11. TIMISOARA, IANUARIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

ASUPRA UNEI TEOREME A D-LUI V. THÉBAULT.

DE

D. V. IONESCU

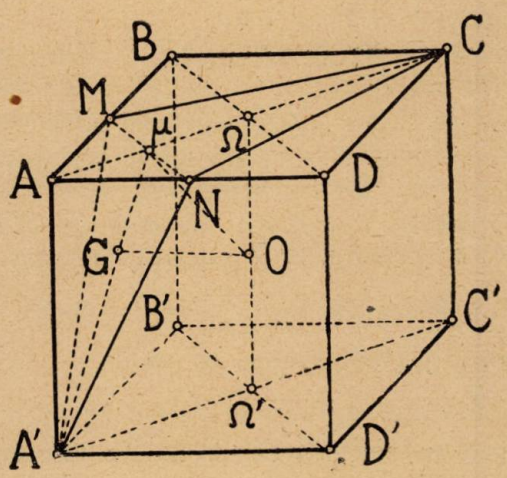
In *Gazeta Matematică*[1] s'a tratat următoarea teoremă datorită d-lui *Thébault.*

„Intr'un cub A B C D A′ B′ C′ D′, *planul care trece prin mijloacele* M *și* N *ale muchiilor* AB, AD *și prin extremitatea* A′ *a muchei* AA′, *este tangent sferei înscrise cubului, în centrul de greutate al triunghiului* A′MN".

1. Vrem să dăm în acest articol, o demonstrație simplă pentru această interesantă teoremă.

Fie O centrul sferei, Ω și Ω' centrele fețelor ABCD, A′B′C′D′ ale cubului, μ intersecția lui AC cu MN, iar G centrul de greutatc al triunghiului A′MN.

Se observă că A′N = NC și că MA′ = MC, astfel că punctele N și M sunt în planul perpendicular în O pe A′C. Punctele C și A′ sunt deci simetrice față de planul ONM și prin urmare acest plan este planul bisector al diedrului format de planele CMN și A′MN.



Pe de altă parte punctele Ω și G împărțind segmentele μC și μA′ în raportul 1 : 2, sunt simetrice față de Oμ. Deducem că OG = OΩ și că dreapta OG este perpendiculară pe dreapta A′μ.

In fine se observă că triunghiurile A′MN, CMN sunt isoscele, de unde rezultă că dreapta MN perpendiculară pe A′μ și Cμ, va fi perpendiculară pe planul μA′C, adică și pe OG.

Deducem că dreapta OG fiind perpendiculară pe A′μ și pe MN va fi perpendiculară pe planul A′MN.

Rezultă că sfera de centru O și rază OΩ este tangentă în G la planul A′MN și teorema este astfel demonstrată.

2. Demonstrația precedentă se aplică și în cazul unui romboedru ABCDA′B′C′D′, cu condiție ca unghiurile A′AN, A′AM să fie obtuse, iar unghiul MAN să fie ascuțit.

Punctul de contact al sferei înscrise în romboedru cu planul A′MN nu va fi însă centrul de greutate al triunghiului A′MN, pentrucă nici proecția centrului sferei pe planul ABCD, nu este centrul de greutate al triunghiului CMN.

[1]) *Gazeta Matematică*, Vol. L, p. 141.

TEOREME DIN GEOMETRIA ANALITICĂ

DE

G. IUGA

1. Teoremă. *Presupunând dată în coordonate carteziene ortogonale grupa următoarelor șase puncte reale ale spațiului*

$$(1)\qquad \begin{matrix} M_1(a,b,c) & M_3(b,c,a) & M_5(c,a,b) \\ M_2(a,c,b) & M_4(c,b,a) & M_6(b,a,c) \end{matrix}$$

asociate între ele prin permutarea coordonatelor, cele şase puncte sunt situate întotdeauna pe un cerc.

Demonstraţia este imediată. In adevăr, cele şase puncte se găsesc situate atât pe sfera

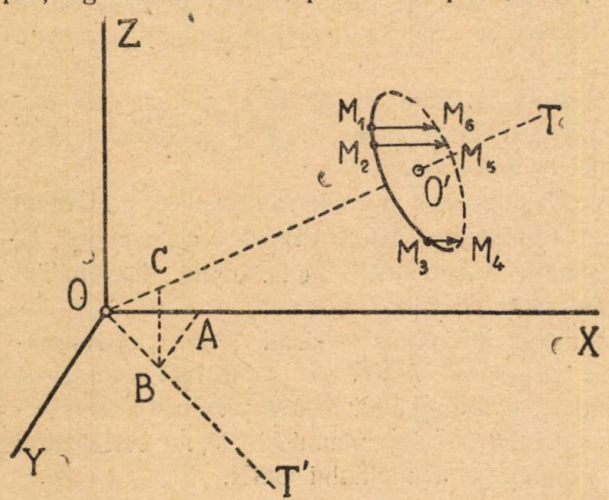
$$(2) \qquad x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$$

cât şi în planul

$$(3) \qquad x+y+z=a+b+c,$$

deci pe intersecţia acestor două suprafeţe, care este un cerc. Planul (3) al acestui cerc e perpendicular pe dreapta $x=y=z$.

Prin analogie cu *bisectoarea întâia* a planului, vom numi această dreaptă *trisectoarea principală* a spaţiului, pentru motivul că ea descompune triedrul tridreptunghic, format de semiaxele pozitive ale sistemului de coordonate în trei triedre egale, despărţite prin feţele TOX, TOY, TOZ (fig. 1), întocmai cum într'un plan bisectoarea împarte unghiul drept al axelor coordonate în două părţi egale. Dacă luăm, pe de altă parte, în con-



siderare că proecţiunile trisectoarei pe planurile coordonate sunt bisectoarele acestor planuri, atunci observăm că triedrul tridreptunghic considerat se mai desparte, şi prin feţele proectante ale trisectoarei în trei unghiuri tetraedrice egale.

Prelungirea trisectoarei îndeplineşte acelaş rol în octantul opus celui considerat. Totodată observăm că în celelalte octante ale spaţiului avem alte trei trisectoare *secundare*: $-x=y=z$, $x=-y=z$ şi $x=y=z$. Fiecare din ele se poate transforma în trisectoarea principală a spaţiului, dacă considerăm dirijată în sens contrar una din axele coordonate.

2. Razele OM_i ale sferei (2) sunt oblice egale în raport cu perpendiculara dusă din O pe planul (3). Această perpendiculară se confundă cu trisectoarea (principală), aşadară centrul O′ al cercului determinat de punctele M_i se găseşte pe trisectoare. Distanţa planului (3) dela O fiind egală cu $\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$, coordonatele centrului O′ ale cercului sunt egale cu $\frac{a+b+c}{3}$.

Dacă notăm cu d_{ik} valoarea absolută a distanţei dintre punctele M_i şi M_k, iar

$$T=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca,$$

găsim prin calcule simple

$$d_{12}=d_{34}=d_{56}=\sqrt{2}\,(b-c)$$

$$d_{14}=d_{25}=d_{36}=\sqrt{2}\,(c-a)$$

$$d_{16}=d_{23}=d_{45}=\sqrt{2}\,(a-b)$$

$$d_{13}=d_{35}=d_{51}=\sqrt{2\,T}=d_{24}=d_{46}=d_{62}.$$

Constatăm imediat că $M_1M_3M_5$ şi $M_2M_4M_6$ sunt triunghiuri echilaterale înscrise în cercul considerat, deci raza cercului este $\sqrt{\frac{2\,T}{3}}$. Hexagonul punctelor M_i are trei laturi egale între ele, despărţite prin celelalte trei laturi, de asemenea egale între ele. Figura (1) s'a construit în ipoteza: $0<a<b<c$ şi $a+c<2\,b$.

Când două din cantităţile a, b, c sunt egale, hexagonul se reduce la un triunghiu, trei laturi anulându-se. Când una din cantităţi este media aritmetică a celorlalte două, hexagonul devine regulat. Când toate trei cantităţile sunt egale, cercul O′ se reduce la centrul său, raza sa devenind zero.

3. Dacă însemnăm cu λ valoarea numerică determinată de expresia $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$, atunci din cele premergătoare deducem că ecuaţia

$$(4) \qquad \lambda\,(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)=0$$

reprezintă un con de revoluţie, în jurul trisectoarei şi cu vârful în O. *Această suprafaţă conţine întreaga grupă* (1) *a punctelor asociate* M_i, *deci şi grupa generatoarelor corespondente acestor puncte.*

In cazul $a=b=c$, adecă $\lambda=1$, ecuaţia (4) este echivalentă cu $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, ceeace revine la condiţiunile $x=y=z$. In acest caz, cele şase generatoare *asociate* se contopesc, conul restrângându-se la axa sa.

Pentru $\lambda=-\frac{1}{2}$ sau $(a+b+c)^2=0$, ecuaţia (4) se poate scrie $(x+y+z)^2=0$ şi, în acest caz, cele două pânze ale conului se confundă cu planul $x+y+z=0$, cercul punctelor M_i fiind cercul mare al sferei (2), aşezat perpendicular pe trisectoarea OT.

Se verifică, cu uşurinţă, că λ este egal cu cosinul unghiului format de generatoarele ce trec prin două puncte ale grupei (1), alese în aşa fel ca indicii lor să fie de aceiaş paritate.

4. In figura 1 avem $OA=AB=BC=1$, $OB=\sqrt{2}$, $OC=\sqrt{3}$. Notând cu ω unghiul de inclinaţie a trisectoarei OT, faţă de oricare din cele trei planuri coordonate, găsim, $\cos\omega=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Complementul lui ω e unghiul format de trisectoare cu oricare din axele coordonate, prin urmare este egal cu unghiul ascuţit dintre planul (3) şi oricare din planurile coordonate, căci am văzut că planul (3) e perpendicular pe trisectoare.

Proectând cercul O′, de pildă, pe planul XOY, obţinem o elipsă cu centru pe bisectoarea OT′ la distanţa $\frac{\sqrt{2}}{3}(a+b+c)$ de O. Diametrul orizontal al cercului proectat este perpendicular pe axa OZ şi pe trisectoare, deci pe planul ZOT. Conchidem că axa mare a elipsei stă perpendicular pe bisectoarea OT′, iar axa mică devine un segment al acestei bisectoare. Raportul dintre axa mică şi diametrul cercului proectat fiind $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$, excentricitatea numerică a elipsei este egală cu $\cos\omega=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ţinând seamă că proecţiunile punctelor M_i pe planul XOY sunt (a,b), (a,c), (b,c), (c,b), (c,a) şi (b,a), obţinem următoarea teoremă: *Date fiind cantităţile reale a, b şi c, punctele* (a,b), (a,c), (b,c), (c,b), (c,a) *şi* (b,a), *determinate prin coordonate carteziene ortogonale, se găsesc întotdeauna pe o elipsă cu centrul pe bisectoarea întâia a planului* XOY, *la distanţa* $\frac{\sqrt{2}}{3}(a+b+c)$ *dela originea coordonatelor şi cu axa mare perpendiculară pe această bisectoare. Excentricitatea numerică a elipsei nu depinde în nici un fel de mărimile coordonatelor, ci este egală cu* $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Aplicând transformarea ortogonală

$$\sqrt{2}\,.\,x=\xi-\eta$$
$$\sqrt{2}\,.\,y=\xi+\eta,$$

ecuaţia elipsei se scrie

$$2\left[\xi-\frac{\sqrt{2}}{3}(a+b+c)\right]^2+\eta^2$$
$$=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

unde membrul din dreapta reprezintă pătratul semiaxei mari.

5. Atribuind variabilelor x,y,z rolul de coordonate *omogene* într'un plan, ecuaţia (4) reprezintă în acest caz o *conică*, iar punctele (1) sunt atunci aşezate pe conica corespondentă.

Trecerea dela coordonatele omogene (x,y,z) la cele carteziene (X, Y) se face cu ajutorul egalităţilor $\frac{x}{z}=X$, $\frac{y}{z}=Y$. Luând $\frac{a}{c}=\alpha$ şi $\frac{b}{c}=\beta$, grupa (1) se va exprima în coordonate cartiziene, considerate de noi ortogonale

$$(5)\qquad \begin{matrix} M_1(\alpha,\beta) & M_3\left(\frac{\beta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right) & M_5\left(\frac{1}{\beta},\frac{\alpha}{\beta}\right) \\ M_2\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{1}{\beta}\right) & M_4\left(\frac{1}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}\right) & M_6(\beta,\alpha). \end{matrix}$$

Suntem în drept, deci, să enunţăm teorema: *Punctele* (5) *se găsesc pe conica*

$$(6)\qquad \lambda(X^2+Y^2+1)-(XY+X+Y)=0,$$

unde $\lambda=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}$.

Vedem că bisectoarea întâia a planului este axă de simetrie a conicei.

Pentru $\lambda=-\frac{1}{2}$, conica (6) degenerează într'o dreaptă dublă cu ecuaţia $X+Y+1=0$, şi cum punctele (5) sunt situate pe conică, vom avea $\beta=-\alpha-1$.

Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ obţinem o parabolă, iar $|\lambda| > \frac{1}{2}$ dă elipse şi $|\lambda| < \frac{1}{2}$ hiperbole.

Din cele stabilite la § 3 deducem că pentru $\lambda = 1$ conica se restrânge la punctul (1,1), aşadară $\alpha = \beta = 1$. Tot acolo s'a arătat că $|\lambda|$ nu poate fi supraunitar. Când $\alpha = \beta \neq 1$, sau când una singură din aceste coordonate este egală cu unitatea pozitivă, punctele (5) se suprapun, două câte două, formând un triunghiu, în loc de hexagon.

6, Dacă notăm cu $P_m(x, y, z)$ un polinom întreg de gradul m, omogen şi simetric, în raport cu cele trei variabile, şi cu coeficienţi reali, atunci ecuaţia

7) $$P_m(x, y, z) = 0$$

reprezintă în coordonate omogene ale planului o curbă algebrică de ordinul m.

Din cauza simetriei polinomului, totalitatea punctelor curbei este alcătuită din grupe de câte şase puncte asociate în felul arătat sub (1).

In coordonate cartiziene curba considerată are ecuaţia

(8) $$P_m(X, Y, 1) = 0.$$

In baza celor arătate la § 5, stabilim deadreptul teorema: *Dacă punctul* (α, β) *este situat pe curba* (8), *atunci printre punctele de intersecţie ale acestei curbe cu conica corespondentă* (6) *întâlnim întotdeauna întreaga grupă* (5).

Observare. Când coordonatele α şi β sunt amândouă numere raţionale, atunci toate punctele grupei (5) au de asemenea coordonate raţionale. Această observare este utilă în probleme de analiză nedeterminată, precum vom arăta mai jos cu câteva exemple.

7, Pentru $m = 1$, ecuaţia (8) ia forma simplă

$$A(X + Y + 1) = 0,$$

unde singurul coeficient, $A \neq 0$, n'are înrâurire asupra formei curbei. Dreapta obţinută este singura dreaptă a planului, raportat la sistemul de referinţe adoptat, care conţine puncte asociate de tipul (5). In acest caz $\beta = -\alpha - 1$, prin urmare suntem în cazul $\lambda = -\frac{1}{2}$, tratat mai sus sub două aspecte deosebite. Conica corespondentă se confundă cu dreapta respectivă, cum e şi firesc

Pentru $m = 2$, avem ecuaţia.

$$A(X^2 + Y^2 + 1) + B(XY + X + Y) = 0.$$

Această conică urmând să aibă şase puncte comune cu conica corespondentă unui punct oarecare al ei, cele două curbe se confundă, fiind $\lambda = -\frac{A}{B}$.

Pentru $m = 3$, ecuaţia (8) se scrie

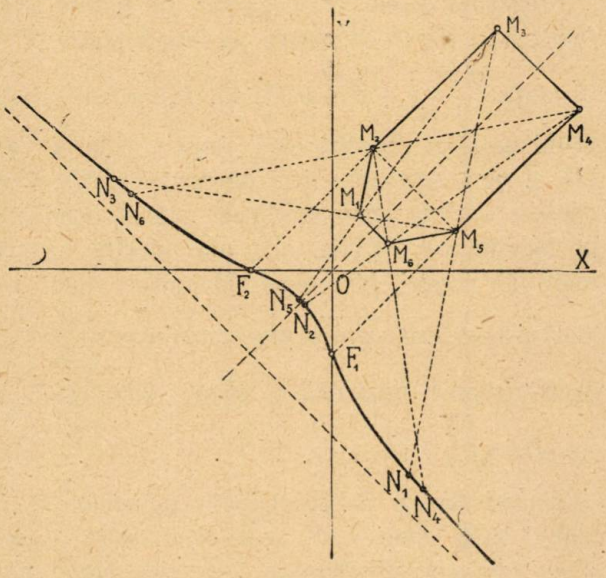
$$A(X^3+Y^3+1)+B(X^2Y+XY^2+X^2+Y^2+X+Y)+CXY=0.$$

Vom enunţa, în chip rezumativ, fără demonstraţiile cuvenite, câteva proprietăţi remarcabile ale cubicei

(9) $$X^3 + Y^3 + CXY + 1 = 0,$$

dedusă din ecuaţia premergătoare, luând $A = 1$ şi $B = 0$.

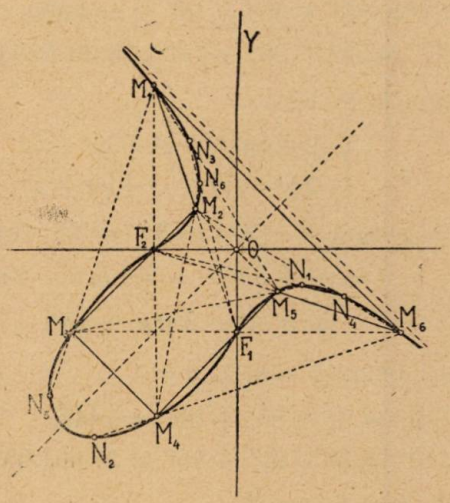
Această cubică are o singură asimptotă reală, cu direcţia -1, adecă paralelă cu bisectoarea a două a planului, pentru oricare valoare a parametrului C. Ordonata la origine a asimptotei este $\frac{C}{3}$. Cele trei puncte de inflexiune, anume $(0, -1)$, $(-1, 0)$ şi punctul dela infinit al asimptotei, sunt comune tuturor cubicelor, ce fac parte din familia (9), de aceea le vom numi, mai pe scurt, *focare*.



Pentru $C < -3$, conica este alcătuită din două părţi cu totul separate şi anume dintr'un oval, situat în cadranul întâi, şi dintr'o ramură infinită

situată în celelalte trei cadrane ale planului (fig. 2). Ovalul se strânge tot mai mult, pe măsură ce se măreşte parametrul C, reducându-se pentru $C=-3$ la punctul izolat (1,1).

Pentru $C > -3$, curba nu mai are nici un punct în cadranul întâi (fig. 3).



Pentru $C=-3$, cubica se descompune în dreapta ce uneşte cele trei focare şi într'o conică redusă la punctul izolat (1,1) menţionat mai sus.

Hexagonul rectiliniu determinat de punctele (5), situate pe curbă, prezintă următoarele proprietăţi fundamentale:

a) Vârfurile hexagonului sunt aşezate simetric, două câte două, faţă de bisectoarea întâia a planului.

b) Dacă luăm în considerare şi prelungirile laturilor şi diagonalelor hexagonului, în fiecare din cele trei focare ale curbei se întâlnesc câte două laturi şi o diagonală.

c) Când hexagonul se reduce la un triunghiu, laturile acestuia trec prin focare, iar diagonalele sunt confundate cu laturile.

d) Fiecare din cele şase diagonale, ce nu trec prin focare, determină pe curbă câte un nou punct de intersecţie N_i. Cele şase puncte, determinate în acest chip, alcătuesc o nouă grupă de tipul (5), dând naştere unui nou hexagon cu proprietăţi identice cu ale hexagonului primitiv. Coordonatele punctelor N_i sunt funcţii raţionale de α şi β, anume

$$(10)\quad \begin{cases} N_1\left(\dfrac{\alpha(\beta^3-1)}{\alpha^3-\beta^3}, \dfrac{\beta(1-\alpha^3)}{\alpha^3-\beta^3}\right), N_2\left(\dfrac{\alpha(\beta^3-1)}{\beta(1-\alpha^3)}, \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\beta(1-\alpha^3)}\right), \\ N_3\left(\dfrac{\beta(1-\alpha^3)}{\alpha(\beta^3-1)}, \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha(\beta^3-1)}\right) \end{cases}$$

şi N_4 simetric cu N_3, N_5 cu N_2, N_6 cu N_1.

e) Tangenta, dusă la curbă în punctul M_i, trece prin N_i (fig. 1).

f) Când una din coordonate este zero, cealaltă ia valoarea -1 şi prin urmare, vârfurile hexagonului cad în focare, expresiile de mai sus devenind iluzorii.

Observare. Curba (8) poate fi privită ca intersecţie a suprafeţei conice (7) cu planul $z=1$. Fiecărui punct de pe curbă îi corespunde, în mod biunivoc, o anumită generatoare a conului. Proprietăţile curbei se pot transpune asupra suprafeţei, înlocuind în enunţuri elementele curbei prin elementele corespunzătoare ale conului. De pildă, proprietăţile hexagonului înscris în cubica (9), prin punctele M_i (5), ne conduc la proprietăţi adecuate ale unghiului hexaedric, obţinut prin generatoarele corespondente. Dreptele diagonale din planul $z=1$ se vor înlocui cu planurile diagonale ale unghiului hexaedric, tangentele cu planurile tangente şi focarele cu generatoarele (de inflexiune) corespondente.

8. Numim, mai scurt, punct *raţional*, pe cel care are ambeie coordonate carteziene raţionale. Coordonatele omogene ale unui astfel de punct se exprimă, sub forma cea mai simplă, prin trei numere întregi, prime între ele, coordonata z fiind numitorul comun cel mai mic al fracţiilor X şi Y.

Rezolvirea ecuaţiei (9) în numere raţionale, cu excluderea focarelor, nu este totdeauna posibilă. Teorema lui *Fermat* dovedeşte imposibilitatea pentru $C=0$. Cazul $C=6$ s'a demonstrat în No. 3 din Mai 1944 al Revistei de faţă.

Inainte de toate este evident că pentru valori neraţionale ale parametrului C nu pot exista soluţii raţionale.

Problema soluţionării pentru valori *întregi* ale parametrului este discutată pe larg în numerile 2, 3 şi 4, din Aprilie, Mai şi Iunie 1944, al acestei Reviste. De astă dată vom indica modalitatea găsirii unui şir de soluţii pentru cazul când parametrul este egal cu pătratul unei *fracţii ordinare* oarecare.

Presupunând $\beta = -1$, punctul $(\alpha, -1)$ se găseşte pe cubica (9), dacă atribuim parametrului valoarea $C = \alpha^2$. Exemple numerice: 1°. Punctul $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ este soluţie raţională a ecuaţiei

$$4(X^3 + Y^3 + 1) + XY = 0,$$

prin urmare $(1, -2, 2)$ este soluţia întreagă a ecuaţiei omogene

$$4(x^3 + y^3 + z^3) + xyz = 0.$$

Aplicând formula (10) pentru N_1, găsim noua soluţie $\left(-\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}\right)$ sau $(8, 7, -9)$, şi aşa mai departe. 2°. Ecuaţia $9(x^3 + y^3 + z^3) + 4xyz = 0$ are soluţia $(2, -3, 3)$, din care deducem $(36, 19, -35)$ ş. a. m. d.

NOTE MATEMATICE

29. — *Résolution en nombres entiers du système*

$$\begin{cases} 2x^4 = y^2 + z^2 + (y+z)^2 \\ 2x^8 = y^4 + z^4 + (y+z)^4 \end{cases}$$

et de quelques systèmes analogues.

Nous avons publié dans *Mathesis*, 1936, page 144, les formules de résolution suivantes pour le système diophantien

$$\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 + (y+z)^2 \\ 2x^4 = y^4 + z^4 + (y+z)^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + t^2 \\ y = -t^2 + 2t + 3 \\ z = t^2 + 2t - 3 \end{cases} \qquad y + z = 4t$$

On peut d'ailleurs rendre les 2^{ds} membres homogènes à l'aide d'une 2^e variable v et multiplier les expressions ainsi obtenues par un même facteur k (positif ou négatif). En homogénisant, nous pendrons les valeurs que voici :

$$\begin{cases} x = t^2 + 3v^2 \\ y = t^2 - 2tv - 3v^2 \\ z = t^2 + 2tv - 3v^2 \end{cases} \qquad y + z = 4tv$$

A. Pour résoudre

$$\begin{cases} 2X^4 = y^2 + z^2 + (y+z)^2 \\ 2X^8 = y^4 + z^4 + (y+z)^4 \end{cases}$$

nous posons $t^2 + 3v^2 = X^2$, avec

$$t = m^2 - 3n^2, \quad v = mn, \quad X = m^2 + 3n^2$$

On aura ensuite

$$y = (m^2 - 3n^2)^2 - 2(m^2 - 3n^2)2mn - 12m^2n^2$$

$$z = (m^2 - 3n^2)^2 + 2(m^2 - 3n^2)2mn - 12m^2n^2$$

$$y + z = 4 \cdot 2mn(m^2 - 3n^2).$$

Exemple. $m = 2, \quad n = 1$

$$\begin{cases} 2.7^4 = 55^2 + 39^2 + 16^2 \quad (= 4.802) \\ 2.7^8 = 55^4 + 39^4 + 16^4 \quad (= 11.529.602) \end{cases}$$

B. Soit le système

$$\begin{cases} 2x^2 = y^4 + z^2 + (y^2 + z)^2 \\ 2x^4 = y^8 + z^4 + (y^2 + z)^4 \end{cases}$$

Ou posera $t^2 - 2tv - 3v^2 = Y^2$, avec

$$t = m^2 + 3n^2, \quad v = 2mn - 2n^2,$$

$$Y = m^2 - 2mn - 3n^2.$$

a) Exemples $m = 2, \quad n = 1$

$$\begin{cases} 2.61^2 = 3^4 + 65^2 + 56^2 \; (= 7442) \\ 2.61^4 = 3^8 + 65^4 + 56^4 \; (= 27.691.682). \end{cases}$$

b) $m = 6, \quad n = 1$

$$\begin{cases} 2.1821^2 = 21^4 + 1560^2 + 2001^2 \; (= 6.632.082) \\ 2.1821^4 = 21^8 + 1560^4 + 2001^4. \end{cases}$$

Nous pouvons aussi carrifier le terme en z, en posant $z = Z^2$, ou $t^2 + 2tv - 3v^2 = Z^2$, avec

$$t = m^2 + 3n^2, \quad v = 2mn + 2n^2,$$

$$Z = m^2 + 2mn - 3n^2.$$

a) Exemples. $m = 2, \quad n = 1$

$$\begin{cases} 2.157^2 = 143^2 + 5^4 + 168^2 \; (= 49298) \\ 2.157^4 = 143^4 + 5^8 + 168^4 \; (= 1.215.146.402) \end{cases}$$

b) $m = 3, \quad n = 2$

$$\begin{cases} 2.1641^2 = 1599^2 + 9^4 + 1680^2 \; (= 5.385.762) \\ 2.1641^4 = 1599^4 + 9^8 + 1680^4 \end{cases}$$

C. Proposons — nous de résoudre

$$\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 + T^4 \\ 2x^4 = y^2 + z^2 + T^8 \end{cases}$$

T étant le dernier terme dans le 2^d membre. Il suffit de carrifier l'expression $4tv$.

Exemple $t = 4, \quad v = 1$

$$\begin{cases} 2.19^2 = 5^2 + 21^2 + 4^4 \; (= 722) \\ 2.19^4 = 5^4 + 21^4 + 4^8 \; (= 260.642). \end{cases}$$

Note. Comme on sait résoudre l'équation

$$t^2 + a\,t\,v + b\,v^2 = u^k$$

pour une valeur entière et positive donnée de k, on obtient aisément une solutlon du système

$$\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 + (y+z)^2 \\ 2x^4 = y^4 + z^4 + (y+z)^4 \end{cases}$$

où l'un des 4 termes x, v, z ou $y+z$ est une puissance quelconque.

Voici, pour terminer, une solution générale de

$$\begin{cases} 2\,Y^6 = x^2 + z^2 + (y+z)^2 \\ 2\,X^{12} = y^4 + z^4 + (y+z)^4 \end{cases}$$

En posant $t^2 + 3\,v^2 = X^3$, on a:

$$t = m^3 - 9\,m\,n^2, \quad v = 3\,n\,(m^2 - n^2),$$

$$X = m^2 + 3\,n^2.$$

Exemple. $m = 2,\ n = 1$

$$\begin{cases} 2.7^6 = 37^2 + 323^2 + 360^2 (= 235{,}298) \\ 2.7^{12} = 37^4 + 323^4 + 350^4 (= 27.682.574.402). \end{cases}$$

A. GLODEN.
(LUXEMBOURG))

---

30. — *Zur unbestimmten Analysis.*

Die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 - 3\,x\,y\,z = u^3$ hat die Lösungen

$$\begin{cases} x = a^3 + b^3 + c^3 + 6\,a\,b\,c \\ y = 3\,(b^2\,c + c^2\,a + a^2\,b) \\ z = 3\,(b\,c^2 + c\,a^2 + a\,b^2) \\ u = a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} x = a^3 + 2\,a\,b\,c + b^2\,c + 2\,a\,c^2 + b\,c^2 + 2\,a\,b^2 \\ y = a^2\,c + 2\,b\,c^2 + b^3 + 2\,a\,b\,c + a\,c^2 + 2\,a^2\,b \\ z = a^2\,b + 2\,b^2\,c + a\,b^2 + 2\,a^2\,c + c^3 + 2\,a\,b\,c \\ u = a^3 + b^3 + c^3 - a\,b\,c \end{cases}$$

$a=3, b=2, c=1 : 23^3+24^3+25^3-3.23.24.25=6^3$

$a=4, b=2, c=1 : 102^3+120^3+121^3-3.102.120.121=49^3$

$a=6, b=3, c=1 : 279^3+352^3+369^3-3.279.352.369=190^3$

Es genügt aus ein Parameter:

$$(3\,\alpha^3 - 1)^3 + (3\,\alpha^3)^3 + (3\,\alpha^3 + 1)^3$$

$$- 3\,(3\,\alpha^3 - 1)\,3\,\alpha^3\,(3\,\alpha^3 + 1) = (3\,\alpha)^3$$

$$\alpha = 1 : 2^3 + 3^3 + 4^3 - 3.2.3.4 = 3^3$$

$$\alpha = 3 : 80^3 + 81^3 + 82^3 - 3.80.81.82 = 9^3$$

Eine andere Möglichkeit ist

$$(\alpha^3 - 1)^3 + (\alpha^3 - 1)^3 + (\alpha^3 + 2)^3$$

$$- 3\,(\alpha^3 - 1)^3\,(\alpha^3 + 2) = (3\,\alpha)^3$$

$$\alpha = 2 : 7^3 + 7^3 + 10^3 - 3.7.7.10 = 6^3$$

$$\alpha = 3 : 26^3 + 26^3 + 29^3 - 3.26.26.29 = 9^3.$$

Die Gleichung $x^3 + y^3 + y^3 - 3\,x\,y\,z = 0$ hat die Lösung

$$\begin{cases} x = (a-b)^3 + (a-c)^3 \\ y = (b-c)^3 + (b-a)^3 \\ z = (c-a)^3 + (c-b)^3 \end{cases}$$

$a=4, b=2, a=1 : 5^3 - 4^3 - 1^3 - 3.5\,(-4)\,(-1) = 0$

$a=5, b=2, c=1 : 7^3 - 5^3 - 2^3 - 3.7\,(-5)\,(-2) = 0.$

Man hat ferner

$$(a^2+2bc)^3+(b^2+2ca)^3+(c^2+2ab)^3-3\,(a^2+2bc)^3 \times$$

$$(b^2+2\,c\,a)\,(c^2+2\,a\,b) = (a^3+b^3+c^3-3\,a\,b\,c)^3$$

$a=3, b=2, c=1 : 13^3+10^3+13^3-3.13.10.13=18^2$

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3$$

$$- 3\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 2(a^3+b^3+c^3-3\,abc)$$

$a=3, b=2, c=1 : 5^3+4^3+3^3-3.5.4.3=36.$

JOHANNES MAHRENHOLZ
(COTTBUS)

---

31. — *O relaţie de divizibilitate.*

Îmi propun să arăt că, dacă: $p_1, p_2, \ldots p_n$ reprezintă numerele prime cu N şi mai mici ca el, avem:

$$\sum_1^n (p_i - 1)\,.\,p_i\,.\,(p_i + 1) = \mathcal{M}\,\mathrm{N}.$$

In adevăr, observăm că divizând numărul p_i^3 prin N obţinem drept resturi numerele p_i reproduse într'o ordine oarecare. Prin urmare:

$$\Sigma\,p_i^3 = \mathcal{M}\,\mathrm{N} + \Sigma\,p_i$$

adică tocmai relaţia ce ne-am propus, scriind sub altă formă.

COMANDOR I. LINTES

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 3, 1944.
Asupra distribuției numerelor prime, de C-dor *I. Linteș*. Asupra unei probleme de geometrie, de *C. Borș*. O generalizare a identității lui *Lagrange*, de *Victor V. Icovici*. Concursul „*Gazetei Matematice*" din 1945. Raport asupra premiului „Ing. *H. Capriel*", de *Gh. Th. Gheorghiu, D. V. Ionescu* și *P. Sergescu*. Raport pentru decernarea premiului „*Vasile Conta*", de Ing. *I. Chițulescu*, Prof. *O. Onicescu* și *P. Sergescu*.
Note matematice, probleme rezolvate și propuse.
2. *Gazeta Matematică* Anul L, No. 4, Decemvrie 1944.
Propuneri pentru comemorarea a 50 ani de viață a „*Gazetei Matematice*". Periodicitatea de ordin șase a triunghiurilor pseudo-isoscele, de *D. Barbelian*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.
3. *N. Abramescu*. Metodă pentru aflarea conicei osculatoare la o curbă plană. (Extras din „*Știință și Progres*" Anul IX. No. 1).
4. *N. Abramescu*. Proprietăți ale normalelor la conice. (Extras din „*Gazeta Matematică*", No. 12, An XVLIII 1943).
5. *N. Abramescu*. Aplicații ale geometriei la discuția și separarea rădăcinelor unei ecuații. (Extras din „*Gazeta Matematică*" No. 9, An. XLVIII, 1943).
6. *N. Abramescu*. Sur la relation entre les origines de la Géométrie Cayleyenne et la Géométrie sphérique. (Extrait du „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timișoara", T. 11, Fasc. 1—2, 1943).
7 *N. Abramescu* Sur la relation entre les quadriques de *Moutard* et les sections d'une surface par des plans menés par une droite passant par un point de la surface. (Extrait du „*Matematica*" Vol. XIX, 1943).
8. *N. Abramescu* Proprietăți ale vârfurilor unui tetraedru în raport cu ariile fețelor care trec prin aceste vârfuri. (Extras din „*Gazeta Matematică*", No. 2, A. L, 1944).
Ioan V. Mățieș. Contribuții la rezolvarea congruențelor de gradul n și ordinul p. Cuburi isofinale. (Extras din „*Revista Matematică*„ din Timișoara, Vol. XXIV, p. 1—5, 87—92, 99—106).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1492. — *Să se rezolve sistemul de ecuații*

$$\begin{cases} x(y+z)=a(x+y+z), \\ y(z+x)=b(x+y+z), \\ z(x+y)=c(x+y+z). \end{cases}$$

Se va studia apoi sistemul generalizat

$$x_i(\Sigma x_i - x_i)=a_i \Sigma x_i\,, \qquad i=1,2,\ldots n.$$

ION DILI SCHILERU

Soluție. Să considerăm cazul sistemului generalizat: vom împărți cele n ecuații date, una prin alta, în toate modurile posibile: vom obține un sistem de C_n^2 ecuații liniare și omogene în raport cu cele C_n^2 necunoscute $I_{mp}=x_m x_p$,

$$(A)\quad a_i x_i(x_1+x_2+\cdots+x_{j-1}+x_{j+1}+\cdots+x_n) - a_j x_j(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)=0,$$

$$i,j=1,2,\ldots n,$$

al cărui determinant este evident nul, căci ecuațiile sistemului nu sunt toate distincte.

Valorile necunoscutelor I_{mp} vor fi atunci cantități proporționale cu minorii de ordinul $n-1$ ai acestui determinant

$$x_m x_p = k\,\partial_{mp}\,, \qquad m,p=1,2,\cdots n\,, \qquad m\neq p.$$

Deducem

$$x_m x_r = k\,\partial_{mr}\,, \qquad x_p x_r = k\,\delta_{pr}\,,$$

deci

$$x_m^2 = k\,\frac{\partial_{mp}\,\partial_{mr}}{\delta_{pr}} = k\,A_m\,.$$

Aceste valori satisfac ecuațiile sistemului propus când

$$\frac{\sqrt{k}}{\Sigma\sqrt{A_i}} = \frac{a_i}{(\Sigma\sqrt{A_i}-\sqrt{A_i})\sqrt{A_i}}\,, \quad i=1,2,\ldots n;$$

ultimele trebue să se reducă la identități.

Ca aplicație, să considerăm cazul particular al enunțului, $n=3$; sistemul (A) devine aci, cu $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$,

$$(A')\quad \begin{cases} (a-b)xy+ayz-bzx=0, \\ -cxy+(b-c)yz+bzx=0, \\ cxy-ayz+(c-a)zx=0. \end{cases}$$

Vom lua pentru ∂_{ij} determinanții formați cu coeficienții primeior două ecuații; avem

$$\partial_{12}=b(a+b+c),\ \delta_{23}=b(a-b-c),\ \delta_{31}=b(a-b+c),$$

deci

$$x=\frac{\lambda}{b+c-a}\,,\ y=\frac{\lambda}{a-b+c}\,,\ z=\frac{\lambda}{a+b-c}\,,$$

unde

$$\lambda^2=-kb(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a).$$

Valorile astfel determinate pentru x,y,z satisfac și ecuațiile propuse, dacă

$$2\lambda=\Sigma(b+c-a)(a-b+c)=2\Sigma bc-\Sigma a^2.$$

Altă soluție. Se mai poate proceda astfel: însemnând $s=\Sigma x_i$, ecuațiile sistemului se pot scrie

$$x_i^2 - s\,x_i + a_i s = 0\,,$$

care dau

$$2x_i = s \pm \sqrt{s^2-4a_i s}\,,$$

deci, adunând și simplificând prin $s\neq 0$

$$(n-2)\sqrt{s}=\Sigma\sqrt{s-4a_i}$$

din care deducem suma s şi apoi fiecare din necunoscutele x_i.

Notă. D-l *E. Wegener* a obţinut sistemul (A'), apoi valori proporţionale pentru x, y, z. fără să le impună însă şi condiţia de a verifica sistemul dat.

D-l *Şt. Tilică* a dat formule inexacte de rezolvare, fără a indica cel puţin mijlocul prin care le-a obţinut.

M. G.

Problema 1836. — *Să se rezolve inegalitatea*

$$a+\sqrt{2(1+a)x+a^2(x-1)^2}<(1+a)x$$

pentru $0<a<1$. *Aplicaţie* $a=\frac{1}{2}$.

G-L GH. BUICLIU

Soluţie. Trinomul de sub radical trebue să fie pozitiv. Rădăcinile acestui trinom fiind

$$x_{1,2}=\frac{-(1+a-a^2)\pm\sqrt{(1-a)(1+2a)}}{a^2}$$

el va fi pozitiv pentru

$$x<x_1 \qquad \text{şi} \qquad x_2<x.$$

Ori observăm că în condiţiile enunţului atât x_1, cât şi x_2 sunt negativi. Deci vom avea de considerat două cazuri, când $x>0$ şi când $x<0$.

Cazul 1°. $x>0$. Trecem pe a în membrul al doilea

$$(1)\qquad \sqrt{2(1+a)x+a^2(x-1)^2}<(1+a)x-a$$

Dacă

$$(1+a)x-a>0 \qquad *_*^* \qquad x>\frac{a}{1-a},$$

ridicăm ambii membri la patrat şi găsim

$$0<(2a+1)x(x-2),$$

care are loc pentru $x>2$ şi cum $0<a<1$ rezultă

$$\frac{a}{1+a}<2.$$

Deci $x>2$ este soluţia problemei.

Dacă $(1+a)x-a<0$, neegalitatea (1) nu are senz, membrul I fiind pozitiv şi al doilea negativ.

Cazul 2°. $x<0$. În acest caz neegalitatea dată, pentru $x<x_1$ şi $x_2<x$ nu are senz.

Aplicaţia $a=\frac{1}{2}$ nu aduce nici-o particularizare.

Soluţii parţiale de la d-nii: *Bakonni C., Lupescu Corneliu, Pop Emil* şi *Wegener N. Eugen.*

Problema 1997. — *Dacă conica tangentă la două laturi ale unui triunghiu* ABC *tae latura a treia în două puncte isogonale, atunci dreptele care unesc cele două puncte cu vârfurile opuse se întâlnesc pe o bisectoarea unghiului opus laturei a treia, iar dreapta contactelor întâlneşte latura a treia în piciorul celeilalte bisectoare.*

M. GHERMANESCU

Suluţie. Fie M, N punctele de contact ale conicei cu laturile AB, AC, iar P, Q intersecţiile acesteia cu latura BC, conform teoremei lui *Carnot*, avem

$$(1)\qquad \left(\frac{MA}{MB}\right)^2\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QB}{QC}\cdot\left(\frac{NC}{NA}\right)^2=1.$$

De altă parte, punctele P şi Q fiind isogonale, teorema lui *Steiner* (Culegere *Ţiţeica*, Cap. IX, Ed. 2-a, p. 46) ne dă

$$(2)\qquad \frac{PB}{PC}\cdot\frac{QB}{QC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2,$$

astfel că relaţia precedentă devine

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NC}{NA}=\varepsilon\frac{AC}{AB},$$

unde $\varepsilon=1$ când M şi N sunt de aceiaşi parte a laturii BC, iar $\varepsilon=-1$ în cazul contrar.

Fie acum A_1, A_2 picioarele bisectoarelor unghiului A, avem

$$\frac{A_1B}{A_1C}=-\frac{AB}{AC}, \qquad \frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB}{AC}.$$

Acestea stabilite, dacă M şi N sunt de aceiaş parte a laturii BC, avem

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{MA}{MB}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{NC}{NA}&=-1,\\ \frac{MA}{MB}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{NC}{NA}&=1,\end{aligned}$$

deci dreptele BN, CM, AA_1 sunt concurente în baza reciprocii teoremei lui *Ceva*, iar punctele M, N,

A_2 sunt colineare, în baza reciprocii teoremei lui *Menelaus*.

Dacă M şi N nu sunt de aceiaş parte a laturii BC, atunci dreptele BN, CM, AA_2 sunt concurente, iar punctele M, N, A_1 colineare, căci obţinem relaţiile de mai sus, în care am înlocuit A_1 prin A_2 şi reciproc.

Notă. 1°. La această problemă, a trimis o foarte frumoasă şi complectă soluţie analitică d-l *Kinsky Ioan* (student, la Politehnica Timişoara), pe care, din lipsă de spaţiu, nu o putem publica. D-sa arată că există un fascicol liniar de conice tangente la două laturi ale unui, triunghiu şi tăind latura a treia în două puncte isogonale rezultat intuitiv, de altfel, căci condiţiile de mai sus nu sunt suficiente pentru determinarea unei singure conice.

Reciproca proprietăţii exprimate în enunţul problemei arată şi mai clar acest lucru: în adevăr, ducând prin piciorul A_2 al bisectoarei exterioare o dreaptă arbitrară, ea va tăia laturile AB şi AC în două puncte M şi N; conica tangentă acestor laturi în M şi N va tăia latura BC în două puncte isogonale P şi Q, căci teorema lui *Carnot* ne dă relaţia (1), iar colinearitatea punctelor M, N, A_2 ne dă relaţia (3). Acestea duc apoi la relaţia (2) deci, în baza reciprocei teoremei lui *Steiner*, pe care am demonstrat-o în articolul mai jos citat, punctele P şi Q sunt isogonale.

Avem deci atâtea conice îndeplinind condiţiile enunţului, câte drepte se pot duce printr'un punct, adică o infinitate simplă

2°. Reciproc, fiind dată o conică, tangentă la două drepte concurente AB, AC în *M* şi N, orice dreaptă dusă prin intersecţia dreptei MN cu o bisectoare a unghiului A, va întâlni conica în două puncte isogonale.

3°. *Kinsky Ioan* a mai trimis o foarte frumoasă extindere a proprietăţii la cubice, care va forma obiectul unui articol.

4°. Problema de mai sus a fost propusă în legătură cu articolul „O clasă de conice ataşate unui triunghiu", ce am publicat în această *Revistă*, v. XXI, 1941—42, p. 92. Se mai pot obţine şi alte proprietăţi remarcabile, în legătură cu cele stabilite în acel articol. Recomandăm descoperirea lor.

M. G.

Problema 2152 — *Dacă într'un triunghiu, care n'are nici un unghiu obtuz, există relaţia*

$$(1) \qquad \operatorname{cp} A + \operatorname{cp} B + \operatorname{cp} C = 1 .$$

acel triunghiu este dreptunghic.

Dacă se mai dă încă relaţia

$$(2) \qquad \operatorname{sp} B + \operatorname{sp} C + 2 \operatorname{sp} B \operatorname{sp} C = \sqrt{2} ,$$

se cere să se determine şi celelalte unghiuri.

V. ALACI

Soluţie. Se ştie că, *într'un triunghiu* ABC, *care n'are nici un unghiu obtuz, există relaţia*

$$(3) \qquad \operatorname{cp} A + \operatorname{cp} \operatorname{cp} B + \operatorname{cp} C = 1 + 2 \operatorname{cp} A \operatorname{cp} B \operatorname{cp} C,$$

(A se vedea „Trigonometria patratică, p. 71).

Relaţia (3), ţinând seamă de relaţia (1) din enunţ, devine

$$(4) \qquad 2 \operatorname{cp} A \operatorname{cp} B \operatorname{cp} C = 0.$$

De aci deducem că unul din factori este nul, deci unul din unghiurile A, B, C este de 90°, prin urmare triunghiul ABC este dreptunghic.

Trecem acum la a 2-a parte a problemei, adică vom determina unghiurile ascuţite ale triunghiului dreptunghic ABC, când se dă relaţia (2) din enunţ.

Vom considera următoarele cazuri.

1°. *Fie* $A = 90°$. De aci rezultă, $B + C = 90°$ şi ştim că $\operatorname{sp} C = \operatorname{cp} B$, astfel că relaţia (2) devine

$$(5) \qquad \operatorname{sp} B + \operatorname{cp} B + 2 \operatorname{sp} B \operatorname{cp} B = \sqrt{2} .$$

Dar, având $B < 90°$, ştim că $\operatorname{sp} B + \operatorname{cp} B = 1$ şi atunci din (5) rezultă

$$2 \operatorname{sp} B \operatorname{cp} B = \sqrt{2} - 1 ,$$

sau

$$2 \operatorname{sp} B (1 - \operatorname{sp} B) = \sqrt{2} - 1.$$

De aci deducem

$$2 \operatorname{sp}^2 B - 2 \operatorname{sp} B + \sqrt{2} - 1 = 0,$$

deci

$$\operatorname{sp} B = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2}}{2} = \frac{1 \pm (\sqrt{2} - 1)}{2}$$

Avem astfel

$$\operatorname{sp} B = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sp} 67°\,30' ,$$

sau

$$\operatorname{sp} B = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \operatorname{sp} 22°\,30' .$$

(Trigonometria patratică, p. 25).

Rezultă:

$B = 67°\,30'$, deci $C = 22°\,30'$,

sau

$B = 22°\,30'$, deci $C = 67°\,30'$.

2°. *Fie* $B = 90°$. În acest caz, relaţia (2) din enunţ devine

$$1+\text{sp}\,C+2\,\text{sp}\,C=\sqrt{2}\,.$$

deci

$$\text{sp}\,C=\frac{\sqrt{2}-1}{3}=\frac{0{,}41421}{3}=0{,}13807\,.$$

Căutând în tabela care dă valoarea naturală a *sinusului patratic*, (Trig. patratică p. 14), găsim

$B\simeq 9^0,\ 6',31'',$ deci $A\simeq 80^0,\ 53',29''.$

3°. *Fie* $C=90^0$. Din cauză că formula (2) este simetrică în raport cu unghiurile B şi C, rezultă în acest caz

$C\simeq 9^0,\ 6',31'',$ deci $A\simeq 80^0,\ 53'\ 29''.$

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit, Timişoara), *Malița Mircea* (Lic Beiuş) şi *Tincu C-tin* (Lic Loga, Timişoara) care nu a luat în cercetare cazurile $B=90^0$, $C=90^0$.

Problema 2214. — *Să se calculeze derivatele funcţiilor*

$$y=\text{arc sp}\frac{x-1}{x}\quad\text{şi}\quad z=\text{arc sin}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

şi să se explice rezultatul ştiind că y şi z sunt arce din primul cadran.

MARCEL D. COTARIU

Soluţie. Folosind formula de derivare pentru funcţia arc sp x din „Trigonometria patratică", p. 43, când $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$, avem

$$(1)\quad y'=\frac{1}{2\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-2\frac{x-1}{x}+1}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

Apoi,

$$z'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-\frac{2(x-1)^2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2-2x+2}$$

$$=\frac{x^2-2x+2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2-(x-1)^2}}\cdot\frac{1}{x^2-2x+2},$$

sau

$$(2)\quad z'=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

Avem astfel $y'=z'$. Derivatele funcţiilor y şi z fiind egale, rezultă că aceste funcţii diferă printr'o constantă. Să aflăm această constantă.

Pentru aceasta, trecând la funcţiile inverse celor date în enunţ, avem

$$(1)\quad \text{sp}\,y=\frac{x-1}{x},\qquad (2)\quad \sin z=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Arcele y şi z fiind în primul cadran, deducem

$$(3)\quad \text{cp}\,y=1-\text{sp}\,y=1-\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x},$$

$$(4)\quad \cos z=\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}.$$

Împărţind relaţia (1) prin (3) şi (2) prin (4), găsim

$$\frac{\text{sp}\,y}{\text{cp}\,y}=\text{tg}\,y=x-1,\qquad \frac{\sin z}{\cos z}=\text{tg}\,z=x-1,$$

de unde urmează

$$(5)\quad \text{tg}\,y=\text{tg}\,z.$$

Cum arcele y şi z sunt în primul cadran, rezultă din (5),

$$y=z.$$

Constanta cu care diferă arcele y şi z este astfel zero.

Soluţii date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit., Timişoara), *Constantinescu Ilie* (Brăila), *Godea I.* (Polit, Timişoara), *Stanciu Petre* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2228. — *Să se afle adevărata valoarea a expresiei*

$$z=\frac{3x^2-2xy+y^2-2x-4y-1}{x^4+y^3(x+1)+y^2(x^2+x+1)+y(x^3+3x^2+2x+1)-1}$$

pentru $x=1,\ y=0$, *soluţii ale ecuaţiei*

$$2x^3+x^2y^2-3x^2y+6xy^2-y^2-x^2+2xy-1=0.$$

I. C. BALAN

Soluţie. Pentru $x=1,\ y=0$, avem $z=\frac{0}{0}$, adică o expresie nedeterminată.

Pentru o găsi adevărata valoare a lui z, pentru $x=1,\ y=0$, folosim regula lui *L'Hôspital* generalizată, aşa cum a fost stabilită într'un articol[1] din „R.M.T." şi care se enunţă astfel:

Adevărata valoare a unei expresii, $u=\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$, *care la forma* $\frac{0}{0}$, *pentru* $x=x_1,\ y=y_1$, *soluţii ale ecuaţiei* $\psi(x,y)=0$, *este câtul determinaţilor funcţionali* $f(x,y)$, $\psi(x,y)$ şi $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *pentru* $x=x_1, y=y_1$, *adică*

[1]) *V. Alaci.* Expresii nedeterminate de două variabile cu o relaţie de legătură între ele, publicat în *„Revista Matematică"*, Vol. IV, No. 1, 1924.

$$(1)\qquad u=\frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1,y_1) & f'_y(x_1,y_1)\\ \psi'_x(x_1,y_1) & \psi'_y(x_1,y_1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1,y_1) & \varphi'_y(x_1,y_1)\\ \psi'_x(x_1,y_1) & \psi'_y(x_1,y_1)\end{vmatrix}},$$

când această valoare este determinată.

In cazul nostru, avem

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-2x-4y-1,$$

$$\varphi(x,y)=x^4+y^3(x+1)+y^2(x^2+x+1)+y(x^3+3x^2+2x+1)-1,$$

$$\psi(x,y)=2x^3+x^2y^2-3x^2y+6xy^2-y^2-x^2+2xy-1,$$

de unde deducem,

$$f'_x(x,y)=6x-2y-2,\quad f'_y(x,y)=-2x+2y-4,$$

$$\varphi'_x(x,y)=4x^3+y^3+y^2(2x+1)+y(3x^2+6x+2,$$

$$\varphi'_y(x,y)=3y^2(x+1)+2y(x^2+x+1)+x^3+3x^2+2x+1,$$

$$\psi'_x(x,y)=6x^2+2xy^2-6xy+6y^2-2x+2y,$$

$$\psi'_y(x,y)=2x^2y-3x^2+12xy-2y+2x.$$

In aceste expresii, facem $x=1, y=0$ şi obţinem

$$f'_x(1,0)=4,\ f'_y(1,0)=-6,\ \varphi'_x(1,0)=4,\ \varphi'_y(1,0)=7,$$

$$\psi'_x(1,0)=4,\quad \psi'_y(1,0)=-1.$$

Acum, avem imediat adevărata valoarea a lui z pentru $x=1$, $y=0$ şi care conform formulei (1), este

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4&-6\\4&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&7\\4&-1\end{vmatrix}}=\frac{4\begin{vmatrix}1&-6\\1&-1\end{vmatrix}}{4\begin{vmatrix}1&7\\1&-1\end{vmatrix}}=-\frac{5}{8}.$$

Soluţii date de d-ra *Măran I. Ana* (Polit., Timişoara) şi d-l *Anton Ioan* (Polit., Timişoara).

S'au primit şi trei soluţii greşite, fiindcă autorii lor n'au cunoscut regula lui *L'Hôspital* generalizată astfel cum am expus-o mai sus.

PROBLEME PROPUSE

2289. — Să se găsească un patrat perfect de forma $ababac$ ştiind că $c=b+1$.

GAVRIL CRETA

2290. — Să se determine toate valorile lui m şi n reale sau imaginare, astfel ca ecuaţia

$$x^4-mx^3+5x^2+4mx+n^3=63,$$

să aibă o rădăcină dublă şi două rădăcini egale şi de semne contrare.

V. ALACI

2291. — Să se rezolve, în numere întregi, ecuaţia

$$x!y!+1=(x+y)^2.$$

M. GHERMANESCU

2292. — Ştiind că

$$2^{x^3y^z}\cdot 3^{x^3y^3z}\cdot 4^{x^3y^3z}=k \text{ (constant)},$$

să se afle maximul expresiei

$$E=x^{10}y^{10}z^{10}+y^5y^5z^5$$

ILIE CONSTANTINESCU

2293. — Din punctul fix P se duc tangentele PA, PB la un cerc variabil cu centrul într'un punct fix C.

Se cere locul intersecţiei lui CA cu PB şi al lui CB cu PA.

G-L GH. BUICLIU

2294. — Paralele duse la laturile AB, BC şi CA ale unui triunghiu, prin centrul cercului înscris, întâlnesc respectiv laturile AC şi CB în punctele B_2 şi A_1; laturile AB şi AC în C_2 şi B_1, iar laturile BA şi BC în punctele C_1 şi A_2.

Să se arate, că dreptele A_2B_1, B_2C_1, şi C_2A_1 întâlnesc laturile opuse triunghiului, în trei puncte colineare.

Să se arate, că dreapta, care trece prin cele trei puncte colineare este locul geometric al punctelor, pentru care suma algebrică a distanţelor, la laturile triunghiului este egală cu raza cercului înscris. Să se generalizeze.

MARIA NEUMANN

2295. — Se dă un unghiu XOY, un cerc fix A şi un cerc variabil P, tangente la laturile unghiului XOY, cercul P fiind exterior cercului A. O tangentă comună interioară cercurilor A şi P taie pe OX în D şi pe OY în E. Presupunând că cercul P variază, să se afle :

1°. Locul mijlocului M al segmentului DE.

2°. Locul punctului de contact N al cercului P cu DE.

N. ABRAMESCU

2296 — Să se arate că în orice trinnghiu ABC, avem relaţia

$$\operatorname{tg}^2A.\operatorname{tg}^2B.\operatorname{tg}^2C-2=$$

$$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C+2\sec A.\sec B.\sec C.$$

CAROL SIMCSO

Erată. I. In articolul *„Contribuțiuni la rezolvarea congruențelor de gradul n și ordinul p* din *„R. M. T.“*, vol. XXIV, pag. 1—5 se vor îndreapta următoarele:

1°. La pag. 2, în relația V baza k are ca exponent $1-i$ în loc de $i-1$.

2°. La pag. 2, rândul doi de jos trebue *„când“* în loc de *„are“*.

II. In ariicolul *„Cuburi isofinale“* din *„R. M. T.“* acelaș volum, pag. 87—106, se face erata:

1°. La pag. 87, în rândul 5 de jos, stânga trebue $A_p+B_p<2\times 10^p$ în loc de $A_p+B<2+10^p$.

2°. La pag. 88 în relația (8) trebue F_p în loc de F_1.

3°. In tabloul 2, poziția 6, la coloana $N^3/\overline{zu}$, trebu $+\overline{z5}$ în loc de $\pm\overline{z5}$.

4°. La pag. 87, în rândul 11 de sus, dreapta, trebue $+7n_2$ în loc de $-7n_2$.

5°. La pag 91, în rândurile 21, 24, 25 din stânga trebue respectiv m_1', m_4' și m_1' în loc de m_2', iar în rândul 3 de jos dreapta, trebue $=$ în loc de $\pm$.

6°. La pag. 99 rândul 9, dreapta, trebue $\pm\overline{m\,008}$ în loc de $\pm\overline{m\,003}$.

7°. In tabloul 4 trebue îndreptat:

La Nr. 28, în expresia N(m), $\pm$ înaintea parantezei, în loc de $+$.

La Nr. 76, 77, 78, 79, în expresia lui N(m), semnele dinaintea parantezei trebuesc inversate, astfel: $\pm$; $\mp$; $\mp$; $\mp$; în loc de $\mp$; $\pm$; $\pm$; $\pm$.

La Nr. 105, în expresia N(m) trebue 1857, în loc de 1854.

La Nr. 1039, în „ „ „ $\mp(750m$, în loc de $\pm(760m$
„ „ 157, „ „ „ 4669 „ „ „ 469.
„ „ 158, „ „ „ $\mp$ 129 „ „ „ $\pm$ 129.
„ „ 163, „ „ „ 159 „ „ „ 169.

In rândul 2 de jos trebue la Nr. 173 în loc de Nr. 172.

La Nr. 235, în expresia N(m), trebue -833, în loc de -823.

La Nr. 236 și 247 în expresia lui N(m) trebue 2500 în loc de 2500^1.

La Nr. 252, în expresia N(m), înaintea parantezei trebue $\pm$ în loc de $+$.

8°. La pag. 106, în rândul 4 de jos, dreapta trebue $f(x,y)=x^m-y^n$ în loc de $f(x,y)=x^m y^m$.

I. V. M.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Abramescu Victoria (2221, 2252, 2270, 2277, 2286); *Barbu A. Ion* (P; 2217, 2262, 2271, 2278, 2287); *Boerescu P. G.* (P; 2213, 2233, 2234, 2241, 2257); *Bogza Mihai* (1486, 1956, 2070, 2080, 2245, 2250, 2276); *Brașoveanu Gh.* (2250, 2276, 2281); *Cochela Livius* (2245); *Constantinescu Ilie* (P; 2132, 2141, 2174, 2177, 2199, 2205, 2208, 2218, 2228, 2235, 2242, 2258, 2264, 2265, 2267, 2268, 2269, 2270, 2273, 2279); *Enache Ion* (P); *Giurconiu Mihai* (1949, 2003, 2035, 2115, 2191, 2196, 2210, 2213, 2217, 2250), *Grigore A. Gheorghe* (N; 2211, 2275, 2279, 2287); *Linteș I.* (A; N; P); *Popescu I. Barbu* (1842, 2236, 2245, 2246); *Roth R. Egon* (2284, 2288); *Rothenstein Bernhard* (P; 2285, 2287); *Serleanu Gh* (2236, 2244, 2250, 2261, 2264, 2271, 2276); *Teodorescu A.* (2210, 2276); *Tincu C-tin* (1389, 1405, 1413, 1414, 1447, 2087, 2151, 2240, 2247, 2265, 2268, 2269, 2271, 2272, 2279, 2287).

Rugăm a se trimete din timp costul abonamentului pentru anul XXV, „Revistei Matematicei di Timisoara“, ce începe la 1 Martie 1945. — Costul abonamentului fi de 700 (șapte sute) lei. — Taxa de membru 1000 (una mie) lei. — Volumele vechi 800 (opt sute) lei.

ANUL XXIV. FEBRUARIE 1945 No. 12.

1944-1945
CD R 104 1-12

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 40 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 350 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **C. C. TEODORESCU**: VARIATIA UNEI CLASIFICATII.
2. **COMANDOR I. LINTES**: RELATIUNI CU INDICATORI.
3. NOTE MATEMATICE 32, 33, 34.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1978, 2141, 2154, 2191, 2216, 2242.
6. PROBLEME PROPUSE: 2297–2304.
8. TABLA DE MATERII.
7. INFORMATIUNI.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXV (1 Martie 1945 – 1 Martie 1946), va fi de 700 (şapte sute) lei. Un număr 80 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXIV, de 500 (cinci sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXIII inclusiv, broşate, 800 lei fiecare.

ANUL XXIV — No. 12. TIMISOARA, FEBRUARIE 1945

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 40 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 350 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica, Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica, Timișoara.

VARIAȚIA UNEI CLASIFICAȚII

DE

C. C. TEODORESCU.

1. Clasificațiile nu se obicinuiesc numai în viața școlară. Se fac clasificații pentru oameni, pentru materiale, pentru diferite calități și diferite puncte de vedere. A face o clasificație înseamnă a ordona obiectele după un anumit criteriu și a atribui fiecărui obiect un număr de ordine.

În dosul acestei clasificații se găsește totdeauna un anumit interes. De aceea nu ne putem opri întrebarea, dacă o clasificație este mai bună de cât alta și dacă prin clasificația făcută am obținut oarecare rezultate. Dar matematic nu putem prinde acest lucru, și deci nu ne vom preocupa de acest punct de vedere.

Dar o clasificație variază și prin modificarea criteriului după care facem clasificația putem obține variații. Vom căuta să găsim un mijloc pentru a cerceta și a măsura aceste variații.

2. Să considerăm clasificația a 10 obiecte, clasificație făcută pe un anumit criteriu, într'o anumită ordine reprezentată prin cele zece numere. Pe baza unor noui măsurări, sau modificând criteriile noastre, se schimbă rezultatele și se obține altă clasificație.

Să admitem că obiectul al 4-lea devine al 10-lea, al 6-lea devine al 3-lea și al 8-lea devine al 4-lea. Am avea atunci următoarele două clasificații de comparat:

Clas. I	Clas. II	Dif.	Dif.^{2}
1	1	0	0
2	2	0	0
3	5	-2	4
4	10	-6	36
5	6	-1	1
6	3	$+3$	9
7	7	0	0
8	4	$+4$	16
9	8	$+1$	1
10	9	$+1$	1
		$\Sigma = 0$	$\Sigma^2 = 68$

Se vede că locul unor obiecte rămâne neschimbat, fie în fruntea fie în coada clasificației, pe când locul altora se schimbă. Prin schimbarea locului unor obiecte se schimbă și clasificația tuturor celorlalte în intervalul considerat. Astfel locurile se schimb între 3 și 10, cu toate că prin aceste schimbări obiectul 7 nu și-a schimbat locul.

Variația clasificației o putem urmări calculând diferențele între rangurile ocupate de un obiect în cele două cazuri, diferențe care sunt trecute în coloana a treia. Suma acestor diferențe pentru întreg șirul este nulă.

Dacă suma nu ne poate servi, de cât numai ca verificare a calculului, vom face apel la patratele diferențelor, care fiind totdeauna pozitive ne vor da o sumă, care poate fi socotită ca o măsură a variației. Vom putea deci defini variația prin *abaterea patratică medie* care este

$$a = \sqrt{\frac{68}{10}} = \sqrt{6{,}8} = 2{,}61.$$

3. Care poate fi maximul acestei abateri, care ar corespunde unei variații maxime?

Variația maximă ar corespunde cazului când situația ar fi răsturnată, primul obiect ajungând în coadă și ultimul în frunte. Diferențele vor fi atunci maxime și deci și abaterea.

Situația pentru n obiecte ar fi următoarea:

Clas. I	Clas. II	Dif.	Dif.^{2}
1	n	$-(n-1)$	$(n-1)^2$
2	$n-1$	$-(n-3)$	$(n-3)^2$
3	$n-2$	$-(n-5)$	$(n-5)^2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$n-1$	2	$+(n-3)$	$(n-3)^2$
n	1	$+(n-1)$	$(n-1)^2$

Suma patratelor diferenţelor o putem găsi pentru cele două cazuri particulare.

În cazul unui număr pereche $n = 2k$, avem $n/2 = k$ termeni, repetaţi de câte două ori, deci

$$\Sigma^2 = 2[1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2] = \frac{2k}{3}(2k-1)(2k+1),$$

pe când pentru cazul unui număr nepereche $n = 2k+1$, avem un termen la mijloc nul şi simetric $(n-1)/2$ termeni, deci

$$\Sigma^2 = 2[2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 = \frac{2k}{3}(2k+1)(2k+2).$$

4. Pe baza acestor consideraţii am examinat variaţia clasificaţiei unei serii de $n = 120$ studenţi ai Politehnicei, şi anume în modul următor.

a) Prima clasificaţie este aceea alfabetică, sub care se prezintă studenţii la înscrierea pentru concursul de admitere; această clasificaţie nu presupune nici o valoare de merit şi constitue numai un punct de referinţă.

b) Clasificaţia a doua, după rezultatul concursului de admitere în Politehnică; este o clasificaţie de merit pe baza pregătirii făcute.

c) Clasificaţia a treia, după rezultatele examenelor la finele anului I; această clasificaţie este rezultatul unei munci de un an de zile pentru pregătirea ştiinţifică a studenţilor, supusă aprecierii a mai mulţi profesori, care au dat diferitele note.

d) clasificaţia a patra, după frecvenţa şi activitatea la lucrările practice din anul II, la cursul de rezistenţa materialelor; această clasificaţie măsoară puterea de muncă şi răbdarea, înţelegerea tehnică, asiduitatea şi respectarea termenelor, prezentarea lucrărilor desenate (epure), deci diferită de cele două dintâi.

Făcând cele patru clasificaţii de mai sus şi însemnând abaterile cu doi indici corespunzători diferenţelor făcute, găsim următoarele sume de patrate şi următoarele abateri.

a, b	$\Sigma^2_{12} = 306632,$	$a_{12} = 50{,}5,$
a, c	$\Sigma^2_{13} = 256276,$	$a_{13} = 46{,}2,$
a, d	$\Sigma^2_{14} = 280078,$	$a_{14} = 48{,}3,$
b, c	$\Sigma^2_{23} = 165022,$	$a_{23} = 37{,}1,$
b, d	$\Sigma^2_{24} = 215590,$	$a_{24} = 42{,}4,$
c, d	$\Sigma^2_{34} = 127316,$	$a_{34} = 32{,}6.$

Se vede deci că trei clasificaţii, pe bază de examene, se deosebesc mult de prima clasificaţie făcută după alfabet şi abaterile lor de la această poziţie de referinţă sunt senzibil egale.

Cele trei clasificaţii b, c, d, pe bază de examene se deosebesc mai mult între ele. Suntem ispitiţi să explicăm abaterea mai mică a_{34} prin înaintarea studenţiilor la studii, care netezeşte diferenţele; sau abaterea mai mare a_{24} prin diferenţa ce se remarcă între un tânăr bacalaureat reuşit la concursul de intrare şi un student care a terminat anul II de studii.

Abaterea maximă care ar putea fi găsită pentru cazul nostru $n = 120$ este dată de

$$\Sigma^2 = \frac{n}{3}(n-1)(n+1) = \frac{1}{3}120 \times 119 \times 121 = 175960,$$

$$a_{max} = \sqrt{\frac{575960}{120}} = \sqrt{4799{,}66} = 69{,}3$$

şi se vede că abaterile obţinute nu sunt îndepărtate de această valoare maximă.

5. Putem astfel avea o măsură a variaţiei clasificaţiei, dar nu putem şti direcţia în care variem, dacă una din cele patru clasificaţii este mai bună de cât celelalte, dacă una reprezintă un progres.

Examinarea variaţiilor fie cărui obiect în cele patru clasificaţii poate însă să fie interesantă, arătându-ne unele aspecte ale variaţiei şi chiar cauzele care au produs'o dar nu putem să dăm în detaliu toate aceste date, care cer mari desvoltări.

Cercetarea aceasta poate fi urmărită mai departe, când variaţia nu este produsă numai prin jocul clasificaţiei obiectelor, ci când se produce scoaterea unor obiecte din clasificaţie sau introducerea unor noui obiecte, care iau rang într'o clasificaţie făcută, ceia ce va produce variaţia ei.

RELAŢIUNI CU INDICATORI

DE

Comandor I. LINTEŞ.

Dacă $\varphi(N)$ şi $\sigma(N)$ reprezintă indicatorul şi suma numerelor prime cu N şi mai mici ca el, avem:

$$\varphi[\sigma(N)] \geq \sigma[\varphi(N)].$$

In adevăr, observăm că:

$$\varphi[\sigma(N)] = \varphi\left[\frac{1}{2} N \cdot \varphi(N)\right],$$

$$\sigma[\varphi(N)] = \frac{1}{2} \varphi(N) \cdot \varphi[\varphi(N)].$$

Să presupunem apoi că:

$$N = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n},$$

unde: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ sunt factori primi, iar exponenții sunt mai mari ca unitatea.

Punând deasemenea:

$$N = N_{n-1} \cdot a_n^{\alpha_n}, \quad \text{unde} \quad N_{n-1} = \prod_1^{n-1} a_i^{\alpha_i}$$

avem:

$$\varphi[\sigma(N] = a_n^{2\alpha_n - 2} \cdot (a_n - 1)\, \varphi\left[\frac{1}{2}(a_n - 1) N_{n-1} \cdot \varphi(N_{n-1})\right],$$

$$\sigma[\varphi(N)] = \frac{1}{2} a^{2\alpha_n - 3} \cdot (a_n - 1)^2 \cdot \varphi(N_{n-1})\, \varphi[(a_n - 1)\, \varphi(N_{n-1})].$$

Neegalitatea devine:

$$a_n \cdot \varphi\left[\frac{1}{2}(a_n - 1) N_{n-1} \varphi(N_{n-1})\right] > \frac{1}{2}(a_n - 1)\, \varphi(N_{n-1})\, \varphi[N_{n-1} \varphi(N_{n-1})].$$

Punem iarăși:

$$N_{n-1} = N_{n-2} \cdot a_{n-1}^{n-1}, \quad \text{unde} \quad N_{n-2} = \prod_1^{n-2} a_i^{\alpha_i}.$$

Procedând ca mai sus, dăm peste neegalitatea:

$$a_n \cdot a_{n-1} \cdot \varphi\left[\frac{1}{2}(a_n - 1)(a_{n-1} - 1) \cdot N_{n-2} \varphi(N_{n-2})\right] > \frac{1}{2}(a_n - 1)\, a_{n-1} - 1)\, \varphi(N_{n-2}\, \varphi[(a_n - 1)(a_{n-1} - 1)\, \varphi(N_{n-2})].$$

Procedând analog până la ultimul factor, obținem neegalitatea:

$$\prod_1^n a_i \cdot \varphi\left[\frac{1}{2} \prod_1^n (a_i - 1)\right] > \frac{1}{2} \prod_1^n (a_i - 1)\, \varphi\left[\prod_1^n (a_i - 1)\right].$$

Cum numerele $(a_i - 1)$ reprezintă numere pare, afară de cazul când $a_1 = 2$, atunci avem:

$$\varphi\left[\frac{1}{2} \prod_1^n (a_i - 1)\right] = \frac{1}{2}\, \varphi\left[\prod_1^n (a_i - 1)\right].$$

Prin urmare neegalitatea devine:

$$\prod_1^n a_i > \prod_1^n (a_i - 1),$$

care este evidentă.

Cazurile de egalitate sunt atunci când $\varphi(N)$ are toți factorii primi diferiți de factorii primi ai lui N, daoarece avem:

$$\varphi\left[\frac{1}{2} N \varphi(N)\right] = \varphi(N)\, \varphi\left[\frac{1}{2} \varphi(N)\right].$$

Apoi cum pentru $N > 2$, avem totdeauna $\varphi(N)$ par, înseamnă că:

$$\varphi\left[\frac{1}{2} \varphi(N)\right] = \frac{1}{2}\, \varphi[\varphi(N)].$$

Deci:

$$\varphi[\sigma(N)] = \frac{1}{2} \varphi(N)\, \varphi[\varphi(N)] = \sigma[\varphi(N)].$$

O singură excepție avem, atunci când $N = a^\alpha$, unde $\alpha > 1$, deoarece:

$$\varphi[\sigma(N)] = a^{2\alpha - 2} \cdot (a - 1) \cdot \varphi\left[\frac{1}{2}(a - 1)\right],$$

$$\sigma[\varphi(N)] = \frac{1}{2} a^{2\alpha - 3} \cdot (a - 1)^2 \cdot \varphi(a - 1).$$

Și cum:

$$\frac{1}{2} \varphi(a - 1) = \varphi\left[\frac{1}{2}(a - 1)\right],$$

dacă $a > 2$, atunci avem neegalitatea $a > a - 1$, care este evidentă.

Pentru $a = 2$ avem:

$$\varphi[\sigma(N)] = 2^{2\alpha - 2} \quad \text{și} \quad \sigma[\varphi(N)] = 2^{2\alpha - 3},$$

deci tot neegalitate.

Să presupunem acum că exponenții α_i sunt toți egali cu unitatea, adică:

$$N = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Atunci vom proceda din aproape în aproape.

Pentru $N = a_1$, avem evident egalitate.

Pentru $N = a_1 \cdot a_2$, avem:

$$\varphi[\sigma(N)] = \varphi\left[\frac{1}{2} a_1 \cdot a_2 (a_1 - 1)(a_2 - 1)\right] = (a_2 - 1)\, \varphi\left[\frac{1}{2} a_1 \cdot (a_1 - 1)(a_2 - 1)\right],$$

$$\sigma[\varphi(N)] = \frac{1}{2}(a_1 - 1)(a_2 - 1\ \varphi[(a_1 - 1)(a_2 - 1)].$$

Neegalitatea devine:

$$\varphi\left[\frac{1}{2} a_1 (a_1 - 1)(a_2 - 1)\right] > \frac{1}{2}(a_1 - 1)\, \varphi[(a_1 - 1)(a_2 - 1)].$$

Dacă punem $a_3 = a_1^m \cdot A + 1$, unde A este prim cu a_1, avem:

$$\varphi\left[\frac{1}{2}a_1(a_1-1)(a_2-1)\right]=a_1^m(a_1-1)\varphi\left[\frac{1}{2}(a_1-1)A\right],$$

$$\frac{1}{2}(a_1-1)\varphi[(a_1-1)(a_2-1)]=\frac{1}{2}a^{m-1}.(a_1-1)^2.\varphi[a_1-1)A].$$

Şi cum:

$$\varphi\left[\frac{1}{2}(a_1-1)A\right]=\frac{1}{2}\varphi[(a_1-1)A],$$

urmează că neegalitatea devine $a_1>a_1-1$, care este evidentă.

Pentru $N=a_1.a_2.a_3$, avem:

$$\varphi[\sigma(N)]=(a_3-1)\varphi\left[\frac{1}{2}a_1a_2(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)\right],$$

$$\sigma[\varphi(N)]=\frac{1}{2}(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)\varphi[a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)].$$

Punând şi aci $a_3=a_1^m.A_1+1$, sau $(a_2^m A_2+1)$, sau $(a_2^m.a_2^n A_{12}+1)$, în aceleaşi condiţiuni ca mai sus, atunci făcând toate calculele, dăm peste neegalităţile:

$$\varphi\left[\frac{1}{2}a_1.a_2(a_1-1)(a_2-1)A_1\right]$$

$$>\frac{1}{2}(a_1-1)(a_2-1)\varphi[(a_1-1)(a_2-1)A_1],$$

sau

$$\varphi\left[\frac{1}{2}a_1a_2(a_1-1)(a_2-1)A_2\right]$$

$$>\frac{1}{2}(a_1-1)(a_2-1)\varphi[(a_1-1)(a_2-1)A_2],$$

sau

$$\varphi\left[\frac{1}{2}a_1^{m+1}.a_2^{n+1}.(a_1-1)(a_2-1)A_{12}\right]$$

$$>\frac{1}{2}(a_1-1)(a_2-1)\varphi[a_1^m a_2^n(a_1-1)(a_2-1)A_{12}].$$

Cum A_1, A_2, A_{12} sunt primi respectiv cu a_1, a_2, $a_2.a_2$, urmează că neegalităţile devin:

$$\varphi\left[\frac{1}{2}a_1(a_1-1)(a_2-1).A_i\right]$$

$$>\frac{1}{2}(a_1-1)\varphi[a_1-1)(a_2-1)A_i],$$

unde $i=1$ sau 2 şi

$$a_2.\varphi\left[\frac{1}{2}a_1^{m+1}.(a_1-1)(a_2-1)A_{12}\right]$$

$$>\frac{1}{2}(a_1-1)(a_2-1)\varphi[a_1^m(a_1-1)(a_2-1)A_{12}].$$

Punând şi aci $a_2=a_1^p.A_1'+1$, unde A_1' este prim cu a_1, atunci neegalităţile se reduc la $a_1>a_1-1$, care este evidentă.

Şi pe căi similare se poate demontra pentru oricâţi factori primi.

NOTE MATEMATICE

32. — *Asupra unor patrate remarcabile* [1].

Fie a, b, c, d grupele de câte n cifre ale unui patrat perfect şi A, B grupele de câte n cifre ale rădăcinei sale, iar k un întreg.

Condiţia necesară pentru ca

(1) $$a+b+c+d=k(A+B)$$

este

(2) $$(A+B-k)(A+B)=M(10^n-1).$$

În adevăr, problema revine la a rezolva în numere întregi sistemul compus din (2) şi

(3) $$a10^{3n}+b10^{2n}+c10^n+d=(A10^n+B)^2.$$

Scăzând (2) din (3) şi observând că

$$A10^n+B=A(10^n-1)+A+B,$$

obţinem

$$(10^n-1)[a(10^{2n}+10^n+1)+b(10^n+1)+c]=$$

$$[A(10^n-1)]^2+2A(A+B)(10^n-1)+(A+B)(A+B-k),$$

ceia ce arată că trebue să avem condiţia (2).

Exemple. 1. $k=1$, $n=2$. Condiţia (2) devine

$$(A+B-1)(A+B)=99M$$

cu

$$0\leq A\leq 99 \quad \text{şi} \quad 0\leq B\leq 99.$$

Aceste condiţii antrenează.

1°. $A+B=198$ $\ast\ast$ $A=B=99$; 2°. $A+B=45$.

3°. $A+B=55$; 4°. $A+B=99$; 5°. $A+B=100$.

Iată soluţiile care corespund fie-căruia din aceste 5 cazuri.

1°. $9999 \ \ast\ast \ 9999^2=99980001$

cu $99+99=99+98+00+01$.

2°. 1035, 1530, 2025, 2520, 3015, 3510, 4005, 4500.

3°. 1045, 1540, 1738, 2035, 2530, 3025, 3520, 4015, 4510, 5005, 5104, 5203, 5302, 5401, 5500.

[1]) A se vedea nota următoare cu acelaşi titlu.

4°. 1089, 1188, 1485, 1782, 1980, 2079, 2277, 2475, 2673, 2871, 2970, 3168, 3465, 3762, 3960, 4257, 4653, 4752, 4851, 4950, 5049, 5148, 5247, 5940, 6930, 7425, 7623.

5°. 1090, 1189, 1585, 1882, 2080, 2377, 2476, 2575, 2674, 3070, 3169, 3466, 3763, 4060, 4258, 4753, 4852, 4951, 5050, 5149, 5248, 5347, 6040, 7030, 8020, 9010.

Exemplul 2. $k=2$, $n=2$. Din (2) scoatem

care conduce la ipotezele

$$(A+B-2)(A+B)=99\,M,$$

1°. $A+B=11$; 2°. $A+B=90$; 3°. $A+B=99$;

4°. $A+B=101$.

Soluţiile în aceste cazuri sunt după cum urmează.

1°. 1001 şi 1100.

2°. 1278, 1377, 1476, 1674, 1971, 2169, 2367, 2565, 2664, 2763, 2961, 3258, 3357, 3456, 3555, 3852, 4347, 4446, 4545, 4644, 4743, 4941, 5139, 5238, 5337, 5436, 5535, 5634, 5931, 6129, 6426, 6525, 6723, 6921, 7119, 7288, 7515, 7713, 7812, 7911, 8208, 8307, 8406, 8505, 8604, 8802, 8901.

3°. 1287, 1386, 1584, 1683, 1881, 2178, 2376, 2574, 2772, 3069, 3267, 3366, 3564, 3663, 3861, 4059, 4158, 4356, 4455, 4554, 5346, 5445, 5544, 5643, 5742, 5841, 6039, 6138, 6237, 6336, 6435, 6534, 6732, 6831, 7029, 7227, 7326, 7524, 7821, 7920, 8019, 8316, 8415, 8613, 8811, 8910, 9009.

4°. 1388, 1586, 1685, 1883, 1982, 2378, 2576, 2774, 2972, 3269, 3566, 3764, 3863, 3962, 4259, 4358, 4457, 4556, 4655, 5447, 5546, 5645, 5744, 5942, 6041, 6140, 6239, 6437, 6734, 7031, 7130, 7229, 7526, 7724, 7823, 8021, 8120, 8219, 8318, 8516, 8615, 8912, 9011, 9110, 9407, 9506, 9605, 9704, 9803, 9902.

Exemplul 3. $k=3$, $n=2$. Avem

$$(A+B-3)(A+B)=99\,M.$$

Analog ca la primele exemple, găsim următoarele 4 ipoteze:

1°. $A+B=36$ cu soluţiile: 1026, 1125, 1323, 1422, 1521, 1620, 1818, 2016, 2115, 2511, 2610, 2907, 3006, 3105, 3204, 3402, 3501, 3600.

2°. $A+B=66$ cu soluţiile: 2343, 2442, 2541, 2640, 2937, 3036, 3135, 3234, 3333, 3432, 3531, 3729, 3828, 4026, 4224, 4323, 4422, 4521, 4719, 4917, 5214, 5313, 5412, 5709, 5808, 5907, 6204, 6303, 6402.

3°. $A+B=99$ cu soluţiile: 6633, 7128, 7722, 8217, 8514.

4°. $A+B=102$ cu soluţiile: 8517, 8814, 9309.

V. THÉBAULT

---

33. — *Asupra unor patrate remarcabile* [1].

La 7 Martie 1943 am primit nota precedentă pe care nu am publicat-o încă din cauză că are unele lipsuri la examinarea exemplelor. În cele ce urmează completăm rezultatele, care au scăpat d-lui *V. Thébault.*

Exemplul 1. Pentru $k=1$ şi $n=2$ condiţia (2) din nota precedentă, devine

$$(A+B-1)(A+B)=99\,M.$$

De oarece $A+B-1$ şi $A+B$ sunt prime între ele, egalitatea precedentă conduce la următoarele posibilităţi

(α) $A+B=9p$ cu $A+B-1=11q$,

(β) $A+B=11p$ cu $A+B-1=9q$,

(γ) $A+B=99p$ şi (δ) $A+B-1=99p$.

Din (α) se deduce ecuaţia

$$9p=11q+1$$

ale cărei soluţii în numere întregi sunt

$$p=11t+5 \quad \text{şi} \quad q=9t+4.$$

Ducând aceste valori în (α), obţinem

$$A+B=9(11t+5)$$

şi cum atât A cât şi B poate fi cel mult 99, rezultă

$$9(11t+5)\leq 198 \quad \text{sau} \quad t\leq 1{,}5,$$

deci t poate avea valorile 0 şi 1.

Pentru $t=0$, găsim $A+B=45$, care a fost considerat la punctul 2° exemplul 1) al notei precedente, unde s-au omis însă următoarele soluţii de forma 0045. 0144, 0441, 0540 şi 0837.

Pentru $t=1$ se obţine $A+B=144$, caz care nu a fost considerat în nota precedentă şi care are

---

[1]) A se vedea nota precedentă.

următoarele soluții: 4896, 4995, 5292, 5391, 5589, 5688, 5985, 6084, 6282, 6480, 6579, 6975, 7074, 7173, 7371, 7470, 7965, 8262, 8460, 8955, 9351, 9450, 9549, 9648 și 9747.

Plecând dela (β), (γ), (δ), găsim:

La cazul 3^0 pentru $A+B=55$ pe lângă soluțiile date, mai sunt următoarele: 55, 154, 253, 352, 451, 550, 649, 1738.

La cazul 4^0 mai avem soluțiile: 99, 198, 297, 396, 495.

Cazul 5^0 mai admite soluțiile: 199, 298, 397, 496, 595, 644.

În fine exemplul 1) mai admite pentru $A+B=154$, următoarele soluții: 5599, 5698, 5797, 5896, 5995, 6094, 6193, 6589, 6787, 6985, 7084, 7282, 7480, 7579, 7777, 7876, 7975, 8371, 8470, 8668, 8965, 9460, 9955.

Exemplul 2. $k=2$, $n=2$. Pe lângă cazurile și soluțiile examinate de d-l *V. Thébault* mai avem următoarele cazuri și soluții:

1^0. $A+B=11$ încă soluțiile 11, 110.

2^0. $A+B=90$ soluțiile: 387, 486, 684, 783, 882, 981.

3^0. $A+B=99$ soluția: 792.

4^0. $A+B=101$ soluțiile: 893, 992.

În fine la exemplul 2) mai sunt de examinat următoarele 3 cazuri:

5^0. $A+B=2$ cu soluțiile: 2,101 și 200.

6^0. $A+B=110$ cu soluțiile: 1694, 1892, 1991, 2783, 3278, 3674, 3872, 3971, 4565, 4763, 4862, 5159, 5258, 5357, 5456, 5555, 5654, 6545, 6743, 6842, 6941, 7139, 7238, 7337, 7436, 7535, 7634, 8327, 8525, 8921, 9119, 9218, 9416, 9515, 9713, 9812 și 9911.

7^0. $A+B=189$, care nu admite nici o soluție

Exemplul 3. $k=3$, $n=2$. Avem

$$(A+B-3)(A+B)=99\,M.$$

Numerele $A+B-3$ și $A+B$ sunt prime între ele sau admit cel mult divizorul 3. Ținând seamă de această observație, avem de examinat următoarele posibilități:

α) $A+B=9m$; $A+B-3=11n$ $*_*$ $A+B=99t+135$, care nu dă soluții căci

$$3(A+B)=405>a+b+c+d,$$

cea mai mare valoare a sumei $a+b+c+d$ fiind $4\times 99=396$.

β) $A+B=11m$; $A+B-3=9n$ $*_*$ $A+B=99t-132$, care dă $A+B=66$ cu soluțiile date de d-l *V. Thébault* la care se adaugă 759 și 957.

γ) $A+B=99t$ $*_*$ $A+B=99$ examinat complect în nota precedentă.

δ) $A+B-3=99t$ care dă:

a) $A+B=3$ cu soluțiile: 3, 102, 201 și 300.

b) $A+B=102$ cu soluțiile date în nota precedentă.

ε) $A+B=3m$ $*_*$ $A+B-3=33$, care dă cazurile de la δ) și încă următoarele două cazuri, neexaminate:

a) $A+B=36$ cu soluțiile: 36, 135, 234, 333, 432, 531, 630, 729, 1026, 1323, 1422, 1521, 1620, 1818, 2016, 2115, 2511, 2610, 2709, 2907, 3006, 3105, 3204, 3402, 3501 și 3600.

b) $A+B=69$ cu soluțiile: 5 4, 1356, 2445, 2643, 2742, 3138, 3237, 3336, 3435, 3534, 3633, 3732, 3831, 4227, 4326, 4524, 4722, 5217, 5316, 5514, 5623, 5811, 5910, 6009, 6108, 6207, 6306, 6603, 6702.

ξ) $A+B=33m$, $A+B-3=3n$ care dă $A+B=66$ examinat la β) și următoarele două cazuri neexaminate.

a) $A+B=33$ cu soluțiile 33, 132, 231, 330, 429, 627, 825, 1221, 1320, 1419, 1518, 1815, 2013, 2112, 2310, 2508, 2708, 2904, 3003, 3102, 3201 și 3300.

b) $A+B=99$ examinat la γ).

Cu acestea exemplele puse în nota d-lui *V. Thébault* sunt complect rezolvate.

G-L GH. BUICLIU

---

34. — *Remarcă asupra metodei Kubota*[1].

În articolul: La méthode de *Kubota*, *Gh. Țițeica*[2] își propune a aplica această metodă, la câteva propietăți elementare a poligoanelor circumscrise unei conice.

În prima parte a studiului, se stabilește ecuația conicei circumscrise la două triunghiuri a căror laturi

[1]) *Kubota, Mathem. Zeitschrift*, Band 26.

[2]) *Gh. Țițeica, Opere* [Publ. Acad. Rom.], pag. 489.

sunt tangente la o conică dată şi anume se consideră conica

$$(c) \qquad y - 4xz = 0,$$

ecuaţia unei tangente oarecare la această conică este de forma:

$$\lambda^2 x + \lambda y + z = 0.$$

Dacă se transportă în această ecuaţie rădăcinile: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale ecuaţiei:

$$A(\lambda) \equiv a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

şi rădăcinile: $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ ale ecuaţiei:

$$B(\lambda) \equiv b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0,$$

se obţin două triunghiuri: T_A şi T_B circumscrise conicei (c) şi ale căror vârfuri se găsesc pe o conică Γ a cărei ecuaţie este:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ 0 & x & y & z \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

În cele ce urmează îmi propun să găsesc:

A Ce relaţii trebuie să fie între coeficienţii celor două ecuaţii $A(\lambda) = 0$ şi $B(\lambda) = 0$, pentru ca curba Γ circumscrisă celor două triunghiuri *să fie o anumită conică.*

B. Ce devine conica Γ, dacă ecuaţiile de mai înainte au una sau două rădăcini comune.

A. Facem în prealabil observaţia că ecuaţiile $A(\lambda) = 0$ şi $B(\lambda) = 0$ trebuie să aibă toate rădăcinile reale şi distincte, ceiace este evident.

Să desvoltăm acum ecuaţia (1):

$$(1') \quad x^2(a_2b_3 - a_3b_2) + xy(a_3b_1 - a_1b_3) + y^2(a_0b_3 - a_3b_0) + zx(a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 - a_0b_3) + yz(a_2b_0 - a_0b_2) + z^2(a_0b_1 - a_1b_0) = 0.$$

Să scoatem condiţia ca această conică să fie fără centru. Pentru aceasta trebuie să avem:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & \frac{1}{2}(a_3b_1 - a_1b_3) \\ \frac{1}{2}(a_3b_1 - a_1b_3) & a_0b_3 - a_3b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Acest determinant este nul dacă: elementele liniei întâi vor fi nule, ceiace se traduce prin egalităţile:

$$(2) \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

sau dacă elementele liniei a doua sunt nule, adică vom avea:

$$(3) \qquad \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3}$$

şi în sfârşit dacă o linie sau o coloană este proporţională cu cealaltă, adică dacă există egalitatea:

$$(4) \qquad a_2b_3 - b_2a_3 = a_0b_3 - a_3b_0.$$

Egalităţile (2) (3) şi (4) ne permit să afirmăm că: *Dacă din matricea coeficienţilor ecuaţiilor* $A(\lambda) = 0$ *şi* $B(\lambda) = 0$ *se pot obţine una din grupele de determinanţi egali cu zero:*

$$(a_1b_2) = 0 \qquad (a_0b_1) = 0$$
$$(a_1b_3) = 0 \qquad (a_0b_3) = 0$$
$$(a_2b_3) = 0 \qquad (a_1b_3) = 0$$

sau determinanţii: $(a_2b_3) = (a_0b_3)$, *atunci conica circumscrisă celor două triunghiuri* T_A *şi* T_B *este o parabolă, în alt caz fiind o elipsă sau o iperbolă.*

Observare: Şirul de egalităţi (3) ne dau:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}$$

şi

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{b_3}{b_0}.$$

Ţinând seamă că a_i şi b_i sunt coeficienţii ecuaţiilor $A(\lambda) = 0$ şi $B(\lambda) = 0$ relaţiile de mai sus arată că:

$$\sum_1^3 \lambda_i = \sum_1^3 \lambda'_i$$

$$\prod_1^3 \lambda_i = \prod_1^3 \lambda_i.$$

Adică: *în cazul când sumele şi produsul rădăcinilor celor două ecuaţii* $A(\lambda) = 0$ *şi* $B(\lambda) = 0$ *sunt respectiv egale, conica* Γ *este de gen parabolă:*

Celelalte cazuri se obţin cu uşurinţă din studiul ecuaţiei (1').

B. 1) Dacă: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ şi $\lambda'_1 \neq \lambda'_2 \neq \lambda'_3$, atunci cele două triunghiuri T_A şi T_B sunt două triunghiuri propriu zise; iar conica circumscrisă acestor două triunghiuri este şi ea o conică propriu zisă.

2) În cazul când $A(\lambda) = 0$ şi $B(\lambda) = 0$ au o rădăcină comună, înseamnă că cele două triunghiuri au o latură comună şi în acest caz, 4 din cele 6 puncte sunt în linie dreaptă, iar *conica* Γ *circumscrisă celor*

două triunghiuri degenerează în dreapta formată de cele 4 puncte și dreapta celorlalte două.

3) Dacă ecuațiile de mai înainte au câte două rădăcini comune: $\lambda_1 = \lambda_1'$ și $\lambda_2 = \lambda_2'$, atunci cele două triunghiuri au câte două laturi comune, iar cele șase puncte sunt așezate câte trei pe o aceiași dreaptă și în acest caz conica Γ degenerează în cele două drepte pe care sunt așezate vârfurile.

Putem afirma deci că:

Dacă ecuațiile $A(\lambda) = 0$ *și* $B(\lambda) = 0$ *au una, sau două rădăcini comune, conica* Γ *circumscrisă celor două triunghiuri* T_A *și* T_B *degenerează în două drepte.*

MIHAIL ST. BOTEZ

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul L, No. 4, Decemvrie 1944 Propuneri pentru comemorarea a 50 ani de viață a „*Gazetei Matematice*" de *A Bunescu, I. Chițulescu, P. Sergescu* Periodicitatea de ordin șase a triunghiurilor pseudo-isoscele, de *D. Barbelian.* Note matematice, probleme rezolvate și propuse:

2. *I. Linteș.* Sur l'écoulement d'un gaz sous grande pression et avec grande vitesse. (Extrait du Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest, 1944).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1978. — *Există un patrat perfect care, urmat de rădăcina sa patrată, să dea alt patrat perfect?*

M. GHERMANESCU

Soluție. Fie N^2 patratul căutat, iar P^2 patratul final; dacă n este numărul cifrelor lui N, trebue să avem

$$10^n N^2 + N = P^2$$

sau

$$P^2 = N(10^n N + 1).$$

Cum numerele N și $10^n N + 1$ sunt prime între ele, egalitatea precedentă nu poate avea loc decât dacă

(1) $\quad N = m^2, \quad 10^n m^2 + 1 = p^2, \quad p < 10^n.$

Dacă n este par, $n = 2r$, ultima egalitate este imposibilă, căci diferența a două patrate nu poate fi egală cu unitatea decât în cazul când un patrat este 0, iar celalt este 1.

Dacă n este impar, să punem $n = 2n_1 + 1$, $m = 2^\alpha m_1$, m_1 impar; ultima egalitate (1) se poate scrie

1') $\quad 2^{2n_1+2\alpha+1} \cdot 5^{2n_1+1} \cdot m_1^2 = (p-1)(p+1),$

care arată că $p \pm 1$ sunt două numere pare consecutive, deci unul se divide numai prin 2, iar celalt prin $2^{2n_1+2\alpha}$; vom pune deci

(2) $\quad p \pm 1 = 2^{2n_1+2\alpha} r, \quad p \mp 1 = 2s, \quad 5^{2n_1+1} m_1^2 = rs,$

unde r și s sunt întregi impari, primi între ei, unul fiind divizibil și prin 5^{2n_1+1}.

Scăzând egalitățile (2), obținem

(3) $\quad 2^{2n_1+2\alpha-1} r - s = \pm 1.$

Dacă $s = 5^{2n_1+1} s_1^2$, $r = r_1^2$, această egalitate devine, dacă punem $2^{n_1+\alpha-1} r_1 = u$, $5^{n_1} s_1 = v$,

$$2u^2 - 5v^2 = \pm 1,$$

imposibilă în întregi, căci $u^2 = \text{mult. } 5 \pm 1$.

Dacă $r = s^{2n_1+1} r_1^2$, $s = s_1^2$, atunci

$$p = 10^n (2^{2\alpha-1} r_1^2) \mp 1,$$

egalitate de asemeni inacceptabilă, căci dă $p > 10^n$, afară de cazul $\alpha = 0$, $r_1 = 1$, deci $p = 5 \cdot 10^{n-1} \mp 1$, cu care ultima egalitate (1), devine

$$(5 \cdot 10^{n-1} \mp 1)^2 = 10^n m^2 + 1$$

sau (4) $m^2 = 5^2 \cdot 10^{n-2} \mp 1$, unde n este *impar* mai mare ca 1. Cum un patrat, divîzat prin 3, dă restul 1, se vede că trebue să luăm semnul — în membrul al doilea al egalității (4).

Dacă $n = 3$, avem $m^2 = 249$, care este imposibilă în întregi.

Dacă $n > 3$, m^2 se termină prin 99, care nu este terminație de patrat.

Răspunsul la problemă este dar *negativ.*

Notă. Un corespondent scrie condiția din enunț sub forma $N^2 + N = P^2$! M. G.

Problema 2141. — *Să se determine* q *astfel ca expresia*

$$E(x) = \frac{nx^{p+1} - (n+1)x^p + (p-n)x + 1 - p + n}{(x-1)^q},$$

să aibă o limită finită pentru $x = 1$, n, p, q *fiind întregi și pozitivi. Discuție.*

I. V. MATIES

Soluție: Observăm că pentru $x=1$, expresia dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Pentru a-i afla adevărata valoare, vom aplica regula lui *L'Hôspital.*

1° *Presupunem întâi* $q=1$. Regula lui *L'Hôspital* aplicată expresiei date, ne dă

$$E(1)=\lim_{x=1}\frac{n(p+1)x^p-(n+1)px^{p-1}+p-n}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

Rezultă, în acest caz, că pentru $x=1$, expresia dată are limita finită zero.

2° *Presupunem* $q=2$. În acest caz, observăm că $x=1$ este rădăcina dublă atât pentru numărătorul cât și pentru numitorul fracției date, deci după regula iui *L'Hôspital,* trebuie să luăm limita pentru $x=1$ a expresiei ce se obține luând câtul derivatelor de ordinul al 2-lea în raport cu x, a numărătorului și numitorului fracției date, astfel avem

$$E(1)=\lim_{x=1}\frac{n(p+1)px^{p-1}-(n+1)p(p-1)x^{p-2}}{2.1}=$$

$$\frac{p(2n+1-p)}{2}.$$

Rezultă în acest caz, că pentru $x=1$, expresia dată are limita $\frac{p(2n+1-p)}{2}$ dacă $p\neq 2n+1$, sau are limita finită 0 pentru $p=2n+1$.

3° *Presupunem* $q=3$ *și* $p=2n+1$. În acest caz, observăm că $x=1$ este rădăcină triplă atât pentru numărătorul cât și pentru numitorul fracției, date, deci după regula lui *L'Hôspital,* trebuie să luăm limita pentru $x=1$ a expresiei ce se obține luând câtul derivatelor de ordinul al 3-lea în raport cu x, a termenilor fracției, astfel avem

$$E(1)=\lim_{x=1}\frac{n(p+1)p(p-1)x^{p-2}-(n+1)p(p-1)(p-2)x^{p-3}}{3!}=$$

$$\frac{p(p-1)[n(p+1)-(n+1)(p-2)]}{3!}$$

și fiindcă $p=2n+1$, avem definitiv

$$E(1)=\frac{(2n+1)2n[n(2n+2)-(n+1)(2n-1)]}{3!}=$$

$$\frac{(n+1)(2n+1).2n}{3!}=$$

$$\frac{(2n+2)(2n+1).2n}{2.3!}=\frac{1}{2}C^3_{2n+2}.$$

Rezultă, în acest caz, că pentru $x=1$, expresia dată are limita finită $\frac{1}{2}C^3_{2n+2}$, unde C^q_p înseamnă combinări de p obiecte luate câte q.

Dacă $q\geq 4$, fracția dată nu mai poate avea o limită finită, această limită fiind, evident, infinită.

Soluții parțiale date de d-nii: *Godea I.* (Polit. Timișoara), *Miclea Nicolae* (Alba Iulia), *Mutiu Antin* (Polit. Timișoara), *Pat Moise* (Polit. Timișoara), *Sabău Mihai* (Polit. Timișoara), și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2154. — *Să se găsească un patrat de patru cifre a cărui rădăcină patrată să fie egală cu suma grupelor de două cifre a numărului inversat.*

V. THÉBAULT

Soluție. Fie (1) $N^2=abcd$ patratul de patru cifre cerut, atunci rădăcina sa patrată N este conform enunțului

(2) $$N=dc+ba=10(b+d)+a+c.$$

Din (1) și (2), deducem

$$N^2+N=1000a+100b+10c+d+10(b+d)+a+c,$$

sau

(3) $$N(N+1)=11(91a+10b+c+d).$$

Cum 11 este număr prim, rezultă din (3)

$N=11k$, sau $N=11k-1$, (k întreg pozitiv).

1° Dacă $N=11k$, atunci

(4) $$N^2=121k^2=abcd.$$

Pentru ca $121k^2$ să fie număr de patru cifre, trebuie să luăm

$$k^2=9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,$$

de unde, din (4) rezultă că N^2 poate fi,

1089, 1936, 3025, 4356, 5929, 7744, 9801.

Dintre aceste patrate, numai 3025 și 9801 satisfac condiția

(5) $$N^2=(dc+ba)^2,$$

fiindcă

$3025=(52+03)^2=55$ și $9801=(10+89)^2=99^2$.

Avem astfel soluțiile 3025 și 9801.

2°. Dacă $N=11k-1$, atunci

(6) $$N^2=121k^2-22k+1=abcd.$$

Pentru ca $121k^2 - 22k + 1$ să fie un număr de patru cifre trebue să luăm $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ de unde, din (6), rezultă N^2 poate fi 1024, 1849, 2916, 4225, 5776, 7569, 9604.

Nici unul din aceste patrate nu dau vre-o soluţie a problemei, nesatisfăcând relaţia (5).

Singurile soluţii sunt astfel 3025 şi 9801.

Observare. Observăm că avem şi

$$3025 = (30 + 25)^2, \quad 9801 = (98 + 01)^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin* (Lt), *Constantinescu N. Ilie* (Lic Brăila), *Giurconiu Mihai* (Tg. Jiu), *Mazilu Marius* (Lic Caransebeş), *Muţiu Antim* (Polit Timişoara) *Pălăceanu D. Vasile* (Lic. Milit. Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit. Timişoara), *Pupezescu Gh. Ioan* (Gura Ocniţei), *Stretea Alexandru* (Polit. Timişoara), *Tincu C. C-tin* (Lic Timişoara), *Vrânceanu Gh. Gheorghe* (Lic. Milit. Timişoara), şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

S'au primit şi alte soluţii care nu merită a fi menţionate căci se foloseşte sau numai tabele de patrate perfecte, sau se fac numai încercări.

Problema 2191. — *Dacă*

$$x + y + z = \pi,$$

atunci avem:

$$\sec x \operatorname{cosec}(y + z) = 2 \operatorname{cosec} 2x$$

$$\Sigma \operatorname{tg}(x + y) \operatorname{tg} z = 3 - \Sigma \sec^2 x$$

$$\Sigma \sin(x + y) \cos z = 2 \sin x \sin y \sin z.$$

EUGEN I. SIPOS

Soluţie. Vom stabili pe rând relaţiile cerute ţinând seamă că din relaţia dată între arce, rezultă $\sin(y+z) = \sin x$, $\operatorname{tg}(x+z) = -\operatorname{tg} z$, $\sin(x+y) = \sin z$.

1°. Primul membru al relaţiei cerute se poate scri succesiv

$$\sec x \operatorname{cosec}(y + z) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin(y + z)}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x} = 2 \operatorname{cosec} 2x$$

şi astfel prima relaţie este stabilită.

2°. Primul membru al relaţiei a 2-a cerute se poate scri succesiv

$$\Sigma \operatorname{tg}(x + y) \operatorname{tg} z = -\Sigma \operatorname{tg}^2 z = 3 - \Sigma (1 + \operatorname{tg}^2 z)$$

$$= 3 - \sum \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 3 - \sum \frac{1}{\cos^2 x} = 3 - \Sigma \sec^2 x$$

A 2-a relaţie din enunţ este stabilită.

3°. Primul membru al relaţiei a 3-a cerute se poate sri

$$\sum \sin(x+y) \cos z = \sum \sin z \cos z = \frac{\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z}{2}$$

$$= \frac{2 \sin(x+y) \cos(x-y) + 2 \sin z \cos z}{2} = \sin z \cos(x+y$$

$$+ \sin z \cos z = \sin z [\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \sin x \sin y \sin z.$$

A 3-a relaţie este şi ea stabilită.

Soluţii date de d-rele *Măran Ana* (Polit., Timişoara, *Tarţa Valeria* (Polit., Timişoara) şi de d. d-nii: *Anton Ioan* (Polit, Timişoara), *Bolcaş* (Lic, Beiuş), *Bossie V. Boris* (Polit., Timişoara), *Braşoveanu Gh.* (Lic. Tr.-Severin), *Chiriac C-tin* (Lt.), *Constantinescu Ilie* (Lic. Brăila), *Costea Florian* (Lic. Beiuş), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Gâţă Gh.* (Lic. Tg.-Jiu), *Gligor Ioan* (student, Timişoara), *Dr. Gloden A.* (Luxemburg), *Godea I.* (Polit., Timişoara), *Maliţa Mircea* (Lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Miclea Nicolae* (Polit., Timişoara), *Munteanu Lucian* (Polit., Timişoara), *Muţiu Antim* (Polit., Timişoara), *Pat Moise* (Politechnica, Timişoara), *Pălăceanu Vasile* (Lic. Milit., Timişoara), *Popescu Barbu* (Lic. Milit., Timişoara), *Rothenstein Bernhard* (Polit, Timişoara), *Sabău Mihai* (Polit., Timişoara), *Stanciu Petru* (Timişoara), *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Szabo Iuliu* (Polit., Timişoara), *Tutor Aurel* (Lic. Făgăraş), *Ţigănoiu Alexandru* (Polit., Timişoara), *Vrânceanu Gheorghe* (Lic. Milit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2216 — *Dacă* $B + C = 90°$, *atunci avem relaţia*

$$\sin B \operatorname{cp} \frac{C}{2} + \sin C \operatorname{cp} \frac{B}{2} = 1.$$

V. ALACI

Soluţie dată de d-ra *Măran Ana* (Polit., Timişoara) şi de d-l *Constantinescu Ilie* (Lic., Brăila).

Având $B + C = 90°$, putem privi unghiurile B şi C ca unghiurile ascuţite ale unui triunghiu dreptunghic ABC.

Aplicând o teoremă din „Trigonometria patratică", anume:

Într'un triunghiu dreptunghic, ipotenuza este egală cu suma produselor între catete şi cosinusurile patratice ale jumătăţilor unghiurilor alăturate, adică

$$(1) \qquad a = b \operatorname{cp} \frac{C}{2} + c \operatorname{cp} \frac{B}{2}.$$

Cum avem,

$$b = a \sin B, \qquad e = a \sin C,$$

relația (1) simplificată cu a, devine

$$1 = \sin B \, cp \frac{C}{2} + \sin C \, cp \frac{B}{2},$$

tocmai relația cerută.

Soluție dată de d-nii *Malița Mircea* (Lic. Beiuș) și *Wegener Eugen* (București).

Considerăm un triunghiu dreptunghic ABC, în care evident există relațiile

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \sin C = \frac{C}{a}, \quad b^2 + c^2 = a^2,$$

$$cp \frac{B}{2} = \frac{a+c}{2p}, \quad cp \frac{C}{2} = \frac{a+b}{2p},$$

(Trigonometria patratică", p. 44), primul membru al relației cerute, notat cu E, se poate scri succesiv

$$E = \frac{b}{a} \cdot \frac{a+b}{2p} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a+c}{2p} = \frac{ab+ac+(b^2+c^2)}{2ap} =$$

$$\frac{ab+ac+a^2}{2ap} = \frac{b+c+a}{2p} = 1.$$

Relația cerută este astfel stabilită.

Soluție dată de d-l *Mahrenholz Johannes* (Cottbus).

Fiindcă unghiurile $\frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ sunt mai mici ca 90^0, din „Trigonometria patratică", p. 11, avem

$$cp \frac{B}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}, \quad cp \frac{C}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

primul membru al relației cerute, notat cu E, se poate scri succesiv

$$(1) \qquad E = \frac{\sin B}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}} + \frac{\sin C}{1+\operatorname{tg}\frac{C}{2}} =$$

$$\frac{\sin B + \sin C + 2\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}.$$

Cum, $2\sin^2\frac{B}{2} = 1 - \cos B$, $2\sin^2\frac{C}{2} = 1 - \cos C$, apoi fiindcă $B+C=90^0$, mai avem $\cos B = \sin B$, $\cos C = \sin B$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$, rezultă că relația (1) se mai poate scrie

$$E = \frac{\sin B + \sin C + 2 - \sin C - \sin B}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) \cdot \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

avem astfel stabilită relația cerută.

Alte soluții date de d-nii: *Anton Ioan* (Polit. Timișoara), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Godea I.* (Polit. Timișoara), *Stanciu Petru* (Timișoara) și *Tincu C-tin* (Lic. Loga, Timișoara).

Problema 2242. — *Să se verifice identitatea*

$$\frac{2a(a+b)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(a+c)(b+c)}{(a-c)(b-c)(c-d)} =$$

$$\frac{2b(a+b)}{(a-b)(b-c)(b-d)} + \frac{(d+a)(d+b)}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

AL. ȚIGANOIU

Prima soluție. Considerăm a 2-a fracție din primul membru și o descompunem în fracții simple, avem

$$(1) \qquad \frac{(a+c)(b+c)}{(a-c)(b-c)(c-d)} = \frac{A}{a-c} + \frac{B}{b-c} + \frac{C}{c-d},$$

unde rămâne să determinăm pe A, B, C.

Pentru aceasta vom înmulți relația (1) cu $a-c$ și vom face $c=a$, apoi vom înmulți cu $b-c$ și vom face $c=b$ și în fine o vom înmulți cu $c-d$ și vom face $c=d$, obținem astfel cu ușurință:

$$A = \frac{2a(a+b)}{(b-a)(a-d)}, \quad B = \frac{2b(a+b)}{(a-b)(b-d)},$$

$$C = \frac{(d+a)(d+b)}{(a-b)(b-d)}.$$

Înlocuind aceste valori în (1), avem

$$\frac{(a+c)(b+c)}{(a-c)(b-c)(c-d)} = \frac{2a(a+b)}{(a-c)(b-a)(a-d)} +$$

$$\frac{2b(a+b)}{(b-c)(a-b)(b-d)} + \frac{(d+a)(d+b)}{(c-d)(a-d)(b-d)}.$$

Această relație se mai poate scri, evident sub forma

$$\frac{2a(a+b)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(a+c)(b+c)}{(a-c)(b-c)(c-d)} =$$

$$\frac{2b(a+b)}{(a-b)(b-c)(b-d)} + \frac{(d+a)(d+b)}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$

şi astfel am obţinut identitatea cerută.

Soluţii date de d-ra *Măran Ana* (Polit., Timişara), *Barbu Ion* (Lic. Caracal), *Birănaş Ion* (Arad), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus) şi *Tincu C-tin* (Lic. Loga).

Soluţie 2-a. Scrim întâi identitatea cerută sub forma

$$\frac{2a(a+b)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{2b(a+b)}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(d+a)(d+b)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0. \quad (2)$$

Considerăm acum fracţia generatoare

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}, \quad (3)$$

unde vedem că gradul numărătorului este cu două unităţi mai mic de cât gradul numitorului, deci conform unei identităţi a lui *Euler*, avem

$$\sum_{a,b,c,d}\frac{f(a)}{\varphi'(a)}=0. \quad (4)$$

Cum $\varphi'(x)=(x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c)$, rezultă că relaţia (4) scrisă desvoltat devine

$$\frac{2a(a+b)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{2b(a+b)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(d+a)(d+b)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0,$$

care este tocmai identitatea (2).

Soluţii date de d-ra *Măran Ana* (Polit., Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti)

PROBLEME PROPUSE

2297. — Să se formeze un cub de 9 cifre întrebuinţând de câte 3 ori 3 din cele 10 cifre ale sistemului zecimal şi ştiind că rădăcina cubului căutat este un număr de 3 cifre identice.

G-L GH. BUICLIU

2298. — Să se găsească două numere prime consecutive de două cifre, a căror sumă este patrat perfect.

GH GOLDIŞ

2299. Să se descompună în factori expresia

$$E=(x-3y+5z)^3-(3x-5y+7z)^3+8(x-y+z)^3.$$

ILIE CONSTANTINESCU

2300. — Să se dezvolte determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (a+b)^2 & (b+c)^2 & (c+a)^2 \\ (a+b)(a^2+b^2) & (b+c)(b^2+c^2) & (c+a)(c^2+a^2) \end{vmatrix},$$

punând rezultatul sub formă de produs de factori.

MARIA NEUMANN

2301. — Fie triunghiul dreptunghic BAC în care CD este bisectoare. Din punctul D se duce o paralelă la AC, care întâlneşte în F pe BC. Din B se duce o dreaptă care întâlneşte pe AC în E şi face un unghiu cu AB egal cu jumătatea unghiului C. Să se arate că DECF este un romb şi să i-se calculeze suprafaţa în funcţie de laturile triunghiului BAC.

CPT. G. P. BOERESCU

2302. — Se dă un triunghiu dreptunghic ABC. Se duce înălţimea AD a unghiului drept şi apoi bisectoarele DE şi DF respectiv ale unghiurilor ADB ADC.

Notăm, $AF=\alpha$, $DE=\beta$, $DF=\gamma$. Să se demonstreze relaţia

$$\alpha\,.\,a(b+c)=\frac{4\sqrt{2}s^2}{\beta+\gamma}.$$

LT ION ENACHE

2303. — Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, cunoscând o latură, suprafaţa şi raza cercului circumscris.

M GHERMANESCU

2304. — Într'un triunghiu dreptunghic ABC, în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem relaţia

$$\operatorname{tg} 4B=\frac{32s^2sp(45^0-B)}{(a^4-32s^2)spB}.$$

V. ALACI

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

Pag.

a) Aritmetică şi Teoria Numerelor.

G. Călugăreanu Observări asupra numerelor prime 51
I. Linteş Două teoreme de Teoria numerelor 75
M. Ghermănescu Asupra problemei 1489 75
I. Linteş Relaţiuni cu indicatori 136

b) Algebră.

I. V. Mătieş Contribuţii la rezolvarea congruenţelor de gradul *n* şi ordinul *p* 1
G. Iuga O problemă de analiză nedeterminată 15, 27, 39
O. N. Ţino Contribuţie la rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei nedeterminate omogene de gradul al treilea . . 29
A. I. Ţigănoiu Progresii mixte 40
I. V. Mătieş Cuburi izofinale 87, 99
M. Ghermănescu Un sistem Diofantian 112

c) Geometrie.

A. Dobrescu Asupra unor cercuri ortogonale şi unor sfere ortogonale 112
D. V. Ionescu Asupra unei teoreme a d-lui *V. Thébault* 124

d) Geometrie analitică.

G. Iuga Teoreme din Geometria analitică 123

e) Mecanică.

C. Iacob Despre calculul traectoriilor bombelor de avion 63

f) Diverse.

C. C. Teodorescu Variaţia unei clasificaţii 135

II. REDACŢIONALE.

* * * Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timişoara 12, 13, 14

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetică şi Teoria Numerelor.

5*). **V. Thébault** Remarques sur les carrés parfaits 20
12. **V. Thébault** Curiosités arithmétiques 53

*) În această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

28. **I. Linteş** Neegalităţi cu indicatori şi numere prime . . . . . Pag. 115
31. **I. Linteş** O relaţie de divizibilitate 129
32. **V. Thébault** Asupra unor patrate remarcabile 138
33. **G. Buiclu** Asupra unor patrate remarcabile 139

b) Algebră.

1. **A. Gloden** Une solution à deux paramètres de l'équation multiple $A_1, A_2, \ldots, A_7 \stackrel{x}{=} B_1, B_2, \ldots, B_5$ $(x = 1, 3, 5)$ 5
2. **A. Moessner** Zum Stand der simultanen Identitäten 5
4. **A. Gloden** Théorème 19
6. **A. Moessner** Solutions paramétriques du système diophantien $a_1^x + a_2^x + a_3^x = b_1^x + b_2^x + b_3^x$, $(x=2, 4)$ 33
7. **A. Moessner** Bemerkung zur Note „Sur une méthode de formation des égalités multigrades $a_1^p + a_2^p + \cdots = b_1^p + b_2^p + \cdots$ $(p = 1, 3, \ldots, 2n+1)$ in der Rev. Mat., Anul XVI, No. 12 34
9. **A. Gloden** Au sujet de la note de *M. Moessner* 44
13. **A. Gloden** Résolution en nombres entiers des équations $x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^{2k}$, $x^{2k} + a\,x^{(2^k-1)}y + b\,y^2 = z^2$, $x^2 + a\,x\,y^k + b\,y^{2k} = z^2$; a et b étant des entiers donnés, positifs ou négatifs, et k étant supérior à 1 . . 54
14. **V. Claudian** Calculul unor determinanţi remarcabili 55
15. **A. Moessner** Einige numerische Identitäten . . 66
16. **I. Linteş** Asupra rezolvării în numere întregi a ecuaţiunilor de forma $x^{2m+1} = a\,y^2 + b$, a, b, m fiind întregi pozitivi 67
17. **Mahrenholz J.** Aufgaben aus der unbestimmten Analysis 68
20. **Mahrenholz J.** Ein diophantisches Problem . . . 78
21. **A. I. Ţigănoiu** Notă la articolul „Progresii mixte“ 78
22. **A. Gloden** Solution complète de quelques équations diophantiennes 92
23. **M. Ghermănescu** Asupra problemei 2091 93
24. **I. Linteş** Un sistem de ecuaţii cu numerele lui *Legendre* 107
25. **M. Ghermănescu** Asupra unui sistem diofantian 107
26. **M. Ghermănescu** Asupra problemei 2173 114
27. **A. Gloden** Sur l'équation diophantique $\frac{(x-1)(x-2)}{2.3}(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) - \Sigma\, x_i\, x_j\, x_k =$

$= -F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $n \not\equiv 0 \bmod 3$, et Pag.
$\frac{(n-1)(n-2)}{2}(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3-3\Sigma x_i x_j x_k$
$= F(y_1, y_2), \ldots, y_m)$, $n \equiv 0 \bmod 3$ 114
29. **A. Gloden** Résolution en nombres entiers du système $2x^4 = y^2 + z^2 + (y+z)^2$, $2x^8 = y^4 + z^4 + (y+z)^4$ et de quelques systèmes analogues 128
30. **J. Mahrenholz** Zur unbestimmten Analysis . . . 129

c) Geometrie.

3. **V. Thébault** Sur l'yperbole équilatère circonscrite à un triangle 6
10. **V. Thébault** Sur les points d'intersection du cercle circonscrit avec les cercles exinscrits 45
11. **I. I. Stamate** Asupra tangentelor comune la cercurile descrise pe laturile unui triunghiu ca diametre 46
18. **V. Thébault** Sur les points de *Feuerbach* . . . 68
19. **V. Thébault** Triangles méteparallèles et orthopôle 77
34. **M. G. Botez** Remarcă asupra metodei *Kubota* 140

d) Trigonometrie.

8. **I. G. Enăchescu** Asupra problemei 1392 34

IV. BIBLIOGRAFIE.

a) Articole.

N. Abramescu Metodă pentru aflarea conicei osculatoare la o curbă plană . . . 130
N. Abramescu Proprietăți ale normalelor la conice 130
N. Abramescu Aplicații ale geometriei la discuția și separarea rădăcinilor unei ecuații 130
N. Abramescu Sur la relation entre les origines de la Géométrie Cayleyenne et la Géométrie sphérique 130
N. Abramescu Sur la relation entre les quadriques de *Moutard* et les sections d'une surface par des plans menés par une droite passant par un point de la surface 130
N. Abramescu Proprietăți ale vârfurilor unui tetraedru în raport cu ariile fețelor eare trec prin aceste vârfuri 130
P. Andronescu Die Elektrizität unter dem Energetischen Gesichtspunkte 47
E. Arghiriade Sur la géométrie biaxiale des courbes gauches 7
E. Arghiriade Sur une courbe caracteristique d'une courbe plane ou gauche . . 7
A. Bărglăzan Beitrag zur Berechnung von Axialpumpen mit positiver Saughöhe . 79
T. Cernescu Contribuțiuni la cunoașterea platanului din Timișoara 34
I. Curea Die Horizontalseismometer der neuen Erdebenwarte în Timișoara . . 47
I. Curea Inființarea unei stațiuni seismice la Timișoara 56
M. G. Filipescu Importanța Geologiei în cariera inginerească 70
M. Ghermănescu Sur quelques écuations fonctionnelles 6
M. Ghermănescu Ecuația $x^2+y^2 = a z^n$ în întregi . . 6
I. Linteș Le problème de la pénétration des projectiles dans un obstacle et de la préparation des blindajes . . . 70
I. Linteș Realizările tehnice în Artileria română în decursul timpului . . . 70
I. Linteș Sur l'écoulement d'un gaz sous grande pression et avec grande vitesse 142
I. V. Mătieș Patrate isofinale 79
I. V. Mătieș Contribuții la rezolvarea congruențelor de gradul n și ordinul p . 130
A. Moessner u. **A. Gloden**, Einige zahlenteoretische Untersuchungen und Resultate . . 47
G. C. Moisil Sur le passage des variables de *Lagrange* aux variables d'*Euler* en hidrodynamique 6
V. Negrei Le dernier théorème de *Fermat* . 47
V. Novacu Introducere în Mecanica Undulatoare 56
R. Rădulet Verstärkungszahl von Trioden mit Parallelsteggitter 34
P. Szymanski Sur une correspondance effective entre l'ensemble des fonctions continues et un ensemble des nombres réels 6
V. Vâlcovici Sur le distribution des axes principaux d'inertie 117
T. T. Vescan Memoriu de titluri și lucrări . . 79

b) Cărți apărute.

N. Abramescu Lecțiuni de Geometrie analitică . 70
A. Bărglăzan și **V. Gheorghiu**, Probleme de Hidrotehnică 117
M Ghermănescu Trigonometrie plană și sferică . . 47

c) Reviste

Buletinul Politechnicei din București 20
Bulletin Scientifique de l'École Politechnique de Timișoara 56
Bulletin séismique 1944 . . . . . 7, 56
Cercul matematic 6
Gazeta Matematică (, 20, 47, 56, 70, 78, 93, 108, 130, 142
Mathematica 93
Pozitiva 6
Știință și Progres 20

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Examenul de admitere în an. I la Politehnica din Timișoara 69, 115

VI. ERATA.

— Numele autorului Notei Nr. 21 98
— Rectificarea problemei Nr. 1946 98
— Rectificarea problemei Nr. 2232 98

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
50	110	I	
69	142	„	
110	14	II	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
175	110	„	
178	126	„	
185	126	„	
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
244	46	III	
268	78	„	
275	94	„	
291	126	„	
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
359	62	„	
376	94	„	
382	110	„	
393	126	„	
407	158	„	
411	158	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
535	30	VI	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„ VI	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	108
654	102	„	
656	102	„	117
658	102	„	
686	134	„	
695	199	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
860	108	IX	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	21
924	60	„	
939	84	„	
954	108	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	79
984	12	„	
992	24	„	
1000	36	„	47
1001	36	„	48
1008	48	„	
1012	48	„	
1037	84	„	70
1043	96	„	
1060	120	„ XI	
1067	132	„	
1068	138	„	
1077	138	„	
1093	24	XII	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1289	36	„	
1295	36	„	
1299	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1323	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1405	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	

1).	2).	3).	4).
1450	132	XV	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1490	52	„	
1492	52	„	130
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1514	88	„	
1516	88	„	
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1575	24	„	
1582	36	„	
1583	36	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1600	60	„	
1604	72	„	
1613	84	„	

1).	2).	3).	4).
1615	84	XVII	
1618	96	„	
1621	96	„	
1624	96	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1632	108	„	
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1643	132	„	
1645	132	„	
1651	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1661	12	XVIII	
1662	12	„	
1667	24	„	
1668	24	„	
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	
1676	36	„	
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1693	60	„	
1694	60	„	
1695	60	„	
1697	72	„	
1698	72	„	
1706	84	„	
1708	84	„	
1709	84	„	
1711	84	„	
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1722	108	„	
1723	108	„	
1724	108	„	
725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1733	120	„	
1737	132	„	
1739	132	„	

1).	2).	3).	4).
1740	132	XVIII	
1741	132	„	
1742	132	„	
1744	149	„	
1747	149	„	
1749	149	„	
1750	149	„	
1754	16	XIX	
1755	16	„	
1756	16	„	
1821	156	„	
1758	16	„	
1759	16	„	
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1767	28	„	
1865	68	XX	
1769	40	XIX	
1770	40	„	
1772	40	„	
1780	56	„	
1781	56	„	
1784	80	„	
1789	80	„	
1792	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1797	124	„	
1800	124	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	
1811	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1816	156	„	
1820	169	„	
1822	169	„	
1824	169	„	
	16	XX	
1826	16	„	
1832	28	„	
1833	28	„	
1836	28	„	131
1838	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	

1).	2).	3).	4).
1847	44	XX	
1849	44	„	
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	
1857	56	„	
1858	68	„	
1860	68	„	
1861	62	„	
1865	68	XX	
1767	28	XIX	
1868	80	„	
1869	80	„	
1873	80	„	
1874	92	„	
1877	92	„	
1878	92	„	
1880	92	„	
1646	132	XVII	
1881	92	XX	
1882	104	„	
1886	104	„	
1889	104	„	
1893	116	„	
1894	116	„	
1897	116	„	
1898	128	„	
1901	128	„	
1903	128	„	
1905	128	„	
1906	140	„	
1907	140	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1915	157	„	
1917	157	„	
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1925	12	„	
1926	12	„	
1930	12	„	
1932	24	„	
1935	24	„	
1937	24	„	
1938	36	„	
1939	36	„	34
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	

1).	2).	3).	4).
1943	36	XXI	
1944	36	„	
1945	36	„	
1946	48	„	80
1949	48	„	
1945	48	„	
1951	48	„	
1952	48	„	
1953	48	„	
1954	64	„	
1955	64	„	
1956	64	„	
1957	64	„	
1958	64	„	
1959	64	„	
1960	64	„	
1961	64	„	
1962	76	„	
1963	76	„	
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1969	76	„	80
1970	88	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	
1978	100	„	142
1979	100	„	
1981	100	„	7
1982	100	„	
1983	100	„	
1984	100	„	
1986	112	„	
1989	112	„	
1990	112	„	
1991	112	„	
1994	124	„	7
1995	124	„	
1996	124	„	
1997	124	„	131
2000	124	„	
2001	124	„	
2002	136	„	49
2003	136	„	
2004	136	„	
2009	136	„	
2010	148	„	

1).	2).	3).	4).
2011	148	XXI	81
2012	148	„	
2015	148	„	
2016	148	„	
2017	148	„	
2018	16	XXII	
2019	16	„	
2022	16	„	
2024	16	„	
2025	16	„	
2026	16	„	
2027	36	„	
2031	30	„	9
2032	30	„	
2033	30	„	
2034	42	„	9
2035	42	„	
2038	42	„	10
2039	42	„	
2040	42	„	
2042	54	„	
2043	54	„	
2044	54	„	
2045	54	„	
2046	54	„	
2047	54	„	
2048	54	„	
2048	54	„	
2049	54	„	
2050	66	„	
2051	66	„	
2052	66	„	
2053	66	„	
2054	66	„	
2055	66	„	
2056	66	„	
2057	66	„	
2058	78	„	
2059	78	„	21
2060	78	„	
2062	78	„	
2063	78	„	
2064	78	„	
2065	78	„	
2070	90	„	
2072	90	„	82
2073	90	„	
2074	102	„	
2075	102	„	
2077	102	„	71
2078	102	„	
2079	102	„	56
2080	102	„	
2081	102	„	71

1).	2).	3).	4).
2086	114	XXII	
2087	114	„	
2090	126	„	
2091	126	„	83
2092	126	„	
2093	126	„	
2094	126	„	
2095	126	„	
2096	126	„	
2098	138	„	
2099	138	„	
2100	138	„	
2101	138	„	118
2102	138	„	
2103	138	„	
2104	138	„	
2105	138	„	
2106	150	„	57
2107	150	„	57
2108	150	„	
2109	150	„	58
2110	150	„	
2111	150	„	
2112	150	„	
2113	150	„	
2114	12	XXIII	73
2115	12	„	59
2116	12	„	84
2117	12	„	
2118	12	„	
2119	12	„	
2120	12	„	94
2121	12	„	
2122	26	„	
2123	26	„	94
2124	26	„	95
2125	26	„	109
2126	26	„	
2127	26	„	
2128	26	„	
2129	26	„	
2130	38	„	85
2131	38	„	
2132	38	„	
2133	38	„	
2134	38	„	
2135	38	„	
2136	38	„	
2137	38	„	
2138	50	„	
2139	50	„	109
2140	50	„	
2141	50	„	142
2142	50	„	

1)	2).	3).	4).
2143	50	XXIII	
2144	50	„	
2145	50	„	22
2146	62	„	60
2147	62	„	
2148	62	„	22
2149	62	„	
2150	62	„	23
2151	62	„	
2152	62	„	132
2153	62	„	
2154	74	„	143
2155	74	„	24
2156	74	„	35
2157	74	„	
2158	74	„	
2159	74	„	
2160	74	„	
2161	74	„	36
2162	86	„	25
2163	86	„	95
2164	86	„	25
2165	86	„	
2166	86	„	
2167	86	„	
2168	86	„	
2169	86	„	
2170	98	„	36
2171	98	„	
2172	98	„	37
2173	98	„	96
2174	98	„	
2175	98	„	60
2176	98	„	
2177	98	„	
2178	110	„	
2179	110	„	
2180	110	„	
2181	110	„	61
2182	110	„	
2183	110	„	
2184	110	„	
2185	110	„	
2186	122	„	97
2187	122	„	37
2188	122	„	49
2189	123	„	
2190	123 / 146	„ / „	97
2191	123	„	144
2192	123	„	
2193	134	„	
2194	134	„	
2195	134	„	

1).	2).	3).	4).
2196	134	XXIII	
2197	134	„	
2198	134	„	
2199	134	„	
2200	134	„	
2201	146	„	
2202	146	„	
2203	146	„	
2204	146	„	
2205	146	„	
2206	146	„	
2207	146	„	109
2208	146	„	
2209	11	XXIV	
2210	11	„	
2211	11	„	
2212	11	„	
2213	11	„	120
2214	11	„	133
2215	11	„	
2216	11	„	144
2217	26	„	
2218	26	„	
2219	26	„	
2220	26	„	
2221	26	„	
2222	26	„	
2223	26	„	

1).	2).	3).	4).
2224	26	XXIV	
2225	38	„	
2226	38	„	85
2227	38	„	120
2228	38	„	133
2228 bis	56	„	
2229	38	„	
2230	38	„	
2231	38	„	
2232	38	„	
2233	50	„	
2234	50	„	
2235	50	„	
2236	50	„	
2237	50	„	
2238	50	„	
2239	50	„	
2240	50	„	
2241	62	„	
2242	62	„	145
2243	62	„	
2244	62	„	
2245	62	„	
2246	62	„	
2247	62	„	
2248	62	„	
2249	74	„	
2250	74	„	

1).	2).	3)	4)
2251	74	XXIV	
2252	74	„	
2253	74	„	
2254	74	„	
2255	74	„	
2256	74	„	
2257	86	„	
2258	86	„	
2259	86	„	
2260	86	„	
2261	86	„	
2262	86	„	
2263	86	„	
2264	86	„	
2265	98	„	
2266	98	„	
2267	98	„	
2268	98	„	
2269	98	„	
2270	98	„	
2271	98	„	
2272	98	„	
2273	110	„	
2274	110	„	
2275	110	„	
2276	110	„	
2277	110	„	
2278	110	„	

1).	2).	3).	4).
2279	110	XXIV	
2280	110	„	
2281	122	„	
2282	122	„	
2283	122	„	
2284	122	„	
2285	122	„	
2286	122	„	
2287	122	„	
2288	122	„	
2289	134	„	
2290	134	„	
2291	134	„	
2292	134	„	
2293	134	„	
2294	134	„	
2295	134	„	
2296	134	„	
2297	146	„	
2298	146	„	
2299	146	„	
2300	146	„	
2301	146	„	
2302	146	„	
2303	146	„	
2304	146	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abel, 35.
Abramescu N., 12, 70, 74, 108, 130, 134.
Adam D. R., 12.
Adamescu M., 12.
Alaci V., 1, 11, 12, 15, 25, 27, 36, 38, 39, 50, 51, 56, 60, 62, 63, 70, 71, 74, 75, 79, 82, 86, 87, 98, 99, 110, 111, 120, 122, 123, 132, 133, 134, 135, 144, 146.
Albeață N. E., 108.
Aldea N. N., 108.
Almăjan P., 12.
Amărăștеanu M., 74.
Ambrus F., 12.
Anastasiade I., 12.
Andronescu P., 12, 47.
Angheluță T., 12, 56.
Anton I., 7, 9, 10, 22, 23, 25, 35, 36, 57, 58, 59, 60, 61, 85, 86, 94, 95, 110, 120, 121, 133, 134, 144, 145.
Ardelean S., 12.
Arghiriade E., 7, 12.
Armeanca I., 56.
Arsene A., 108.
Atanasiu A. I., 20.
Avram C., 25, 36, 37, 62, 85, 94, 95, 109, 110.

Bădescu R., 12, 93.
Baidaff B. I., 12.
Bakony C., 12.
Bakony C., 57.
Bălan C. I., 37, 62, 133.
Bănărescu M., 12.
Băncilă G., 12.
Barbilian D., 130, 142.
Barbu A. I., 86, 120, 121, 146.
Barbu V., 9, 10, 22, 59, 60, 85, 94, 95.
Bărglăzan A., 12, 56, 79, 117.
Baron C., 12.
Bârș D. P., 117.
Belea C. G., 10.
Beneș P., 12.
Berindean V., 12.
Berzănescu A., 12.
Bianu B., 20.
Bică E., 60, 120.
Binet, 112.
Birănaș I., 61, 85, 86, 95, 110, 120, 121, 146.
Birck, 6.
Bitang A., 9, 10, 57, 58, 72, 83, 94, 119.
Blasianu V., 12.
Robănac M., 12.
Boeresco P. G., 7, 61, 80, 146.
Boeriu V., 48
Bogza M., 145.
Bolcaș V., 36, 37, 94, 144.
Boldescu B. P., 9.
Bonea I., 12.
Bordașiu I. N., 10.
Boriș V., 36.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Borş C., 130.
Borza A., 120.
Boşian O., 12.
Bossie V. B., 36, 37, 57, 58, 60, 80, 81, 85, 94, 110, 120, 144.
Botez M., 10, 12, 142.
† Botez M., 20.
Botiş V., 12.
Bouligand G. M., 93.
Braşoveanu D. G., 25, 37, 50, 94, 109, 110, 120, 144.
Bratoşin R., 108.
Brocard, 112.
Broglie L., 56.
Buicliu G., 9, 11, 12, 20, 21, 26, 38, 48, 49, 50, 62, 74, 80, 86, 98, 110, 122, 131, 134, 140, 146.
Bumbu V., 12, 56.
Bunescu A., 56, 93, 142.
Burghiu D. L., 10.

Călniceanu C., 12.
Călugăreanu G., 12, 51.
Cândea C., 12, 56.
Capriel H., 130.
Cârnaţiu I. I., 26, 36, 60, 61, 62, 85, 95, 97, 109.
Carnot, 132.
Cârstoiu I., 56.
Catona V., 12.
Cătuneanu C., 12.
Cauchy, 29.
Cernescu C. N., 20.
Cernescu T., 34, 56.
Cesáro, 79.
Cherdivarenu I., 23, 25, 26, 36, 60, 61, 97, 109.
Chiriac C., 9, 22, 25, 26, 36, 37, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 71, 72, 81, 82, 83, 85, 94, 97, 98, 109, 110, 144.
Chiţulescu I. I., 20, 47, 79, 130, 142.
Choquet G., 83.
Cicirean G., 25, 26, 50, 109.
Ciorănescu N., 93.
Claudian V., 12, 56.
Coandă I. V., 49.
Coca A., 12.
Cocârlan P., 108.
Cochela I. L., 37, 110.
Coman A., 12.
Comănescu A., 12.
Constantin P., 49.
Constantinescu G., 12, 17, 18, 31, 33.
Constantinescu G. G., 6, 12, 112.
Constantinescu N. I., 22, 25, 26, 36, 37, 50, 57, 60, 62, 73, 83, 85, 86, 94, 95, 98, 99, 110, 120, 121, 122, 133, 134, 144, 146.
Conta V., 130.
Contrea A., 12.
Costăchescu V. C., 12, 47, 108.
Costea D. F., 37, 94, 110, 120, 141.
Cotariu D. M., 11, 22, 24, 25, 26, 36, 37, 50, 62, 85, 94, 95, 97, 109, 110, 144.
Creţa G., 9, 10, 26, 48, 57, 60, 61, 62, 82, 85, 94, 95, 109, 110, 134.
Cristescu I., 12.
Cristescu V., 47, 70.
Cristodorescu G., 12.
Cristodulo N., 12.
Cserveny I., 12.
Curea I., 12, 34, 47, 56.

Damian T. I., 49.
Darboux, 78.
Dăscălescu H., 108, 120, 121.
David V., 26, 62.
Delisle, 1.
Demetrescu G., 12.
Denjoy A., 93.
Destouches L., 93.
Diaconescu N., 12.
Dickson, 92.
Dimitriu G., 12.
Dimitriu A. I., 108.
Dinculescu C., 12.
Dinu S. D., 108, 117.
Dirichlet, 1.
Dobrescu A., 112.
Dobrescu F., 12.
Dobrozemschi M., 12.
Donici I. N., 20, 47.
Drăganu M., 20, 93.
Drăghiceanu P. P., 79.
Dragomirescu-Buzne, 93.
Dumitriu-Dada, 12,
Dumitrescu I., 120.

Enache I., 9, 22, 25, 36, 37, 57, 62, 86, 94, 109, 110, 120, 146.
Enăchescu G. I., 9, 10, 34, 57, 58, 60, 71, 72, 83, 85, 94.
Erbiceanu C., 12.
Ettinger A., 108.
Euler, 1, 6, 20, 58, 112, 146.

Fasie N. V., 50.
Fermat, 18, 20, 28, 29, 30, 31, 39, 47, 67, 111, 127.
Feuerbach, 68.
Filimon I., 37, 50, 62, 94, 98, 109, 110.
Filipescu M., 12, 60.
Florescu B. I., 17, 29, 30, 31, 108.
Florescu M., 12.
Frăticj I., 12.
Fridlovsky A., 12.
Frunză R., 60, 61, 62, 86, 95, 110.

Gain I., 79, 109.
Gâţă G. G., 37, 57, 58, 60, 62, 73, 81, 94, 109, 144.
Gauss, 1.
Georgescu D., 12.
Georgescu N., 9, 22, 25, 36, 37, 61, 62.
Gheorghiu A., 6, 108.
Gheorghiu G. T., 12, 20, 47, 108, 130.
Gheorghiu Ş., 6, 70, 108.
Gheorghiu V., 12, 117.
Ghermănescu M., 6, 9, 11, 12, 21, 22, 26, 34, 35, 38, 47, 49, 50, 56, 57, 73, 74, 75, 81, 83, 86, 93, 95, 96, 97, 98, 108, 109, 110, 111, 114, 118, 119, 122, 131, 132, 134, 142, 146.
Ghica A., 93.
Chircoiaşiu, 13.
Ghişoiu I. P., 117.
Ghiţescu S., 12.
Ghiţescu V., 93.
Giurconiu D. M., 25, 57, 58, 109.
Gligor N. I., 22, 25, 26, 36, 37, 50, 58, 59, 61, 62, 81, 85, 94, 144.
Gloden A., 5, 6, 13, 20, 33, 47, 55, 56, 93, 107, 115, 129, 144.
Godea P. I., 7, 9, 22, 23, 25, 26, 36, 37, 49, 50, 57, 58, 60, 61, 62, 80, 81, 85, 86, 94, 95, 110, 120, 143, 144, 145.
Goga F., 81.
Goldiş T. G., 22, 37, 60, 62, 85, 86, 94, 110, 120, 146.
Grigore G., 120.
Grigore V., 12.
Grigoriu N, 9.
Groza L., 62, 85, 86, 120.
Grozescu C. L., 7, 9, 10, 22, 23, 24, 26, 36, 37, 49, 50, 57, 58, 60, 61, 62, 80, 81, 85, 86, 94, 95, 110, 120.
Grumăzescu M., 38, 50, 57.

Haimovici A., 108.
Hendli M. M., 26, 62.
Henth M., 85.
Hermann V., 12.
Hermite, 112.
Hoffer O., 12.
Hohoi V., 108.
Honae C., 13.
l'Hôspital, 133, 134, 143.
Hristea H., 13.

Iacob C., 20, 63.
Iacob S. E., 22, 25, 60, 85, 94, 109.
Iancu D., 108.
Ianculescu S. O., 20, 47, 56.
Iasinschi N., 13.
Ieşan S. A., 9, 37, 57, 85, 94, 95, 98, 109.
Ignat M. P., 108.
Iliescu I., 13.
Ioachimescu G. A., 20, 56.
Ioan A. I., 47.
Ionescu-Biss P. H., 13.
Ionescu Bujor C., 13, 47, 79, 112.
Ionescu C. C., 108.
Ionescu F., 110.
Ionescu G., 20.
Ionescu I., 20, 29, 78.
Ionescu F. P., 9, 22, 25, 36, 57, 58, 80, 81, 94, 109.

Ionescu C. V., 22, 23, 24, 26, 36, 94.
Ionescu D. V., 13, 123, 130.
Ionescu S., 13.
Ionescu Ţiu D., C. 13.
Ionescu-Zane N., 20.
Iosifescu C., 22, 110, 120.
Işfanu T., 9, 10.
Iuga G., 15, 27, 30, 31, 39, 123.
Ivănescu C., 13, 49.

Jivănescu S., 13.

Kielburger M., 13.
Kinsky I., 7, 10, 22, 26, 36, 132.
Konstandi G., 20.
Knopf H., 9, 10, 25, 36, 57.
Kubota, 140.
Kühn I., 13.

Lagrange, 1, 29, 32, 96, 114, 130.
Lăpădatu I. M., 117.
Laplace, 70, 93.
Lascu B., 13.
Lascu I., 21.
Laţiu V., 13.
Legendre, 1.
Leonida D., 13.
Linné C., 20.
Linteş I., 13, 20, 70, 75, 79, 107, 115, 129, 130, 136, 142.
Liteanu G., 13.
Livada G., 20.
Logofătu M. T., 60, 62, 94.
Loria G., 93.
Luca I. I., 81, 84.
Luca L. L., 7.
Lucas E., 29, 51.
Lupan A., 13.
Lupescu A. 26.
Lupescu C., 9, 10, 22, 25, 26, 37, 58, 60, 61, 71, 94, 95.

Macovschi E., 13.
Mahrenholz J., 22, 26, 36, 37, 58, 60, 61, 71, 73, 78, 83, 84, 85, 94, 95, 109, 119, 121, 129, 144, 145, 146.
Maliţa A. M., 22, 23, 24, 26, 36, 37, 60, 62, 95, 110, 120, 133, 144, 145.
Manciu C., 20.
Manolache M., 8, 10, 81.
Mauughevici C., 13, 56.
Măran I. Ana, 23, 37, 60, 86, 94, 95, 120, 121, 134, 144, 146.
Mărculescu O., 13.
Marcus E., 93.
Mardan D., 13.
Mărgineanu I., 21, 18.
Margulius M., 49.
Marinescu I., 13.
Marinescu N., 22, 25, 36, 60, 94.
Mărmureanu G., 108, 120.
Martin H., 49.
Mateescu C., 108.
Mateescu S., 13.
Mătieş V. I., 1. 13, 20, 22, 79, 87, 97, 99, 106, 130, 142.
Mazilu M., 37, 62, 94, 98, 120, 144.
Menciu C., 20.
Mereuţă C., 13, 49.
Mesch I., 10.
Miclea N., 37, 60, 61, 62, 86, 94, 120, 143, 144.
Micula O., 108, 117.
Mihăileanu N. N., 13, 21, 49, 79, 80, 117.
Mihaiu G., 117.
Milcoveanu D., 13.
Mioc V., 13.
Moessner A., 6, 26, 34, 44, 47, 56, 67, 68, 112, 118.
Moise I. G., 10.
Moişil C. G., 6.
Motoc D. M., 49.
Munteanu E., 13.
Munteanu G. L., 23, 25, 26, 50, 60, 62, 85, 86, 94, 95, 98, 109, 110, 120, 122, 144.
Murariu P., 13, 20.
Murăroiu I., 108.
Murgulescu Elena, 13.
Murgulescu G. I., 13.
Musta S., 13.
Muţiu A., 9, 10, 22, 23, 25, 26, 36, 57, 58, 60, 61, 62, 73, 85, 94, 95, 109, 143, 144.

Nadaşan S., 1, 13, 15, 27, 39, 51, 63, 75, 87, 99, 111, 123, 125.
Naneş G., 13.
Negrei V., 47.
Neuberg J., 45.
Neumann M., 62, 74, 83, 110, 122, 134
Nicolaeu A., 13.
Nicolau P., 13.
Nicolescu S., 79.
Niculescu V. A., 70.
Novac A., 108.
Novacu V., 56, 117.

Ogrin N., 13.
Olteanu G. I., 10.
Oltenschi I., 13.
Onicescu O, 13, 130.
Oprea D. G., 85, 94.
Oprea D. N., 94.
Orăşeanu C., 13.
Orăşeanu G., 13.

Pălăceanu V., 9.
Pălăceanu D. V., 9, 10, 22, 25, 26, 36, 37, 50, 57, 60, 61, 62, 71, 84, 85, 94, 95, 109, 144.
Panaitescu S., 93.
Pantazi A., 70.
Panţu Z. I., 108.
Pârvu A., 108.
Păsculescu V., 49.
Pat M., 10, 22, 25, 26, 36, 50, 58, 61, 62, 85, 94, 95, 109, 143, 144.
Patriciu V., 13.
Petrescu A., 13.
Pleşcan D. I., 25.
Poboran V. I., 13.
Pompeiu D., 20, 56, 93, 96.
Pop E., 13, 25, 26, 37, 50, 60, 62, 97.
Pop V., 13.
Popa D. M., 70.
Popa N., 13.
Popescu I. A., 71, 81, 95.
Popescu I. B., 25, 36, 37, 58, 60, 62, 85, 86, 94, 97, 98, 100, 110, 144.
Popescu N. C., 13.
Popescu D., 20.
Popescu E., 13.
Popescu I. G, 78.
Popescu I., 13.
Popescu S. T., 108.
Popovici M., 108.
Porumb N., 13.
Poulet P., 78.
Preda I. D., 9.
Predescu I. M., 13, 49, 79.
Protopopescu I., 13.
Ptolomeu, 48.
Pupezescu G. I., 22, 25, 26, 36, 95 144.
Purcariu I., 13.

Racliş N., 20.
Rădoiu N. N., 26, 60, 95.
Rădulescu C. M., 108.
Rădulescu V. N., 23, 24 36, 60.
Răduleţ R., 34 ,56.
Râmniceanu I. C., 108.
Rizescu I., 58.
Rogoz V. I., 25, 26, 37, 60, 62, 85, 94, 97, 98, 110.
Roibănescu C., 13.
Rolle, 22.
Romaca P. I., 108.
Roşu A. A., 47.
Rumănică I., 108.
Rusu D. C., 21, 49.

Sabău C., 7, 81.
Sabău M. G., 22, 26, 36, 37, 50, 58, 59, 62, 94, 95, 98, 110, 143, 144.
Safirescu D., 13.
Sălceanu C., 13.
Sarmeş I., 13.
Săruleşteanu I. E., 7, 26, 36, 83.
Sauciuc I., 13.
Savi G., 13.
Savin A., 108.
Savin C. I., 13, 108.
Savovici F., 49.
Scărlătescu D., 13.
Schileru D. I., 11, 13, 26, 120, 130.
Schram E., 13.
Scorpan A., 13.
Scurtu A. N., 108, 117.
Şerengău M., 60, 61, 62, 95.
† Sergescu B., 108.
Sergescu P., 13, 130, 142.

Severineanu C., 13.
Sikorski G., 20.
Silaş G., 13.
Simcso C., 86, 98, 108, 110, 120, 134.
Simionescu D. G., 13, 20.
† Simionescu I., 20.
Simson, 70.
Şipoş E., 9, 22, 60, 81, 83, 86, 94, 95, 98, 110, 144.
Sirchis I., 108.
Smighelschi O., 14.
Soare M., 60.
Soare S., 46.
Şoimulescu I., 108.
Sparre, 64.
Sprinceană G., 108, 117.
Stamate I. I., 14, 46, 122.
Stamatescu I., 14.
Stambuleanu A., 14.
Stan A., 14, 93, 108, 110, 122.
Stan I., 79.
Stanciu P., 86, 110, 120, 121, 133, 144, 145.
Stanciu V., 20.
Stănescu C., 14.
Stantzel E., 14.
Steblea S., 14.
Ştefănescu M., 9, 10, 26, 36, 60, 94, 95.
Steiner, 78, 132.
Stewart, 68.
Stoenescu A., 20, 79, 110.
Stoica D., 47.
Stoicescu L., 14.
Stoicescu M., 14.
Streja N. I., 57.
Stretea I. A., 7, 9, 10, 22, 25, 36, 85, 96, 144.
Süli M., 49.
Szabo V. I., 37, 50, 62, 110, 144.
Szymanski P., 6, 56.

Tabacu M., 86, 98 110.
Tache S., 20.
Tarţa T., 14, 144.
Tarţa Valeria, 25, 36, 60, 95.
Tatulea D., 108.
Teiuşeanu I. H., 25, 26, 62.
Teodorescu C., 14, 93, 135.
Teodosiu A., 14.
Thébault V., 6, 7, 8, 11, 20, 26, 38, 45, 46, 54, 56, 62, 69, 74, 77, 119, 123, 139, 143.
Tică M., 14.
Tică-Gall P. M., 22, 94.
Ţigănciu A., 11, 22, 23, 25, 26, 36, 37, 38, 40, 50, 57, 58, 60, 61, 62, 74, 85, 86, 94, 95, 98, 109, 110, 120, 144, 145.
Tilică C. S., 79, 131.
Tincu C., 10, 25, 36, 57, 58, 74, 84, 85, 86, 94, 95, 110, 120, 121, 133, 145, 146.
Tincu C. C., 11, 22, 23, 25, 26, 37, 38, 60, 61, 62, 71, 73, 109, 144.
Ţino O., 14, 29.
Ţiţeica G., 1, 79, 140.
Ţiţeica Gabriela, 79.
Trifu E., 14.
Tutor I. A., 22, 26, 36, 37, 50, 60, 62, 85, 94, 95, 109, 144.
Tulvan V. M., 37, 60, 94, 98.
Turicu O., 9, 10.
Tutuc I., 49.

Vâlcovici V., 14, 64, 93, 117, 130.
Vasiliu B. A., 9, 10.
Vasiliu G. G., 108
Vasu V., 21.
Vescan T., 70, 79.
Veverca I., 14.
Viciu A., 14.
Vinţcovschi M., 14.
Vişa E., 14, 23, 93, 119.
Vlad I. V., 14.
Vlădescu I., 14.
Vrânceanu G. G., 24, 25, 26, 36, 37, 57, 60, 62, 93, 97, 98, 110, 144.

Wallace, 70.
Weber M., 14.
Wegener E., 22, 25, 26, 36, 37, 50, 57, 59, 61, 62, 71, 73, 80, 81, 83, 85, 86, 94, 95, 97, 98, 109, 118, 120, 121, 131, 133, 143, 144, 145, 146.
Wigh I., 57.

Zagaican I., 108.
Zăgănescu I., 14.
Zaharia N. O., 14.
Zapan G., 14.
Zbegan V., 14.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Profesor *Vasile Mioc*, asistent la Şcoala Politehnică şi Director la lic. Diaconovici Loga, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bogza Mihai (1960, 1081, 2015, 2113, 2272, 2287); *Brasch Andrei* (2237, 2240, 2287, 2203, 2296); *Denes Ritta* (2221, 2222); *Filimon Ioan* (2232, 2263, 2264, 2296); *Girconiu Mihai* (P; 1833, 1898, 2168, 2178, 2192, 2208, 2209, 2218, 2252, 2257, 2265); *Ghitescu Virgil* (A; N; P); *Gottard Francisc* (2244, 2284); *Kinsky Ioan* (N; P; 1878, 2236, 2250, 2271, 2278, 2279); *Kluger Ioan* (2231, 2236, 2250, 2263, 2276); *London Emeric* (P; 2210, 2220, 2228, 2231, 2235, 2236, 2237, 2243, 2244, 2245, 2246, 2250, 2252, 2253, 2256, 2260, 2261, 2263, 2264, 2269, 2271, 2276); *Petrovici Adalbert* (2196, 2234, 2252, 2265;) *Pop Emil* (P; 2231, 2243, 2244, 2290); *Rothenştein Bernhard* (1878, 2196, 2296, 2271, *Schauer Alexandru* (2224, 2231, 2287, 2296); *Serdeleanu Gh.* (2279, 2285, 2287, 2290, 2296); *Stamciu Petre* (P; 1494, 1894, 2050, 2232, 2241, 2253, 2261, 2263, 2269, 2279); *Stoenescu Florea* (2237, 2247, 2250, 2264, 2276); *Tincu C-tin* (1405, 1413, 1414, 1447, 2087, 2151, 2240, 2247, 2249, 2265, 2268, 2269, 2271, 2272); *Vrânceanu Gh.* (2289, 2296);

Rugăm a se trimete din timp costul abonamentului pentru anul XXV, „Revistei Matematicei di Timisoara", ce începe la 1 Martie 1945. — Costul abonamentului este de 700 (şapte sute) lei. — Taxa de membru 1000 (una mie) lei. — Volumele vechi 800 (opt sute) lei.